PROVA D'ESAME • SESSIONE ORDINARIA 2015

Liceo scientifico e opzione scienze applicate

PROBLEMA 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate dall'estero, un canone fisso da 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

a. Individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.

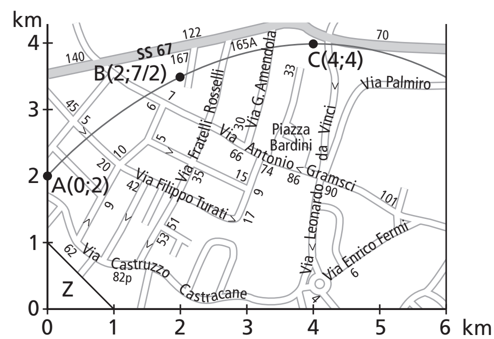
b. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}.$$

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse.

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B e C, dagli assi x e y, e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la «Z», rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.



■ **Figura 1**

c. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A, B e C. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: «*nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio*»; verifica se effettivamente è così.

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

d. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.

PROBLEMA 1

a. Indichiamo con x i minuti di conversazione effettuati nel mese considerato: x rappresenta una variabile discreta, ma ai fini della risoluzione ipotizziamo che vari con continuità in $\mathbb{R}$ e che le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano continue rispetto a x. La spesa totale mensile in euro è espressa quindi dalla funzione:

$$f(x) = 10 + \frac{x}{10}.$$

La variabile x può assumere valori tra un minimo di 0 minuti e un massimo di 43 200 minuti, pari al numero di minuti di un mese commerciale di 30 giorni.

Il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta un modello lineare crescente, dove l'intercetta 10 indica il costo fisso iniziale e la pendenza $\frac{1}{10}$ indica il costo al minuto. Quindi la spesa minima mensile è € 10, che corrisponde a 0 minuti di conversazione, mentre la spesa massima mensile è € 4330, corrispondente a una conversazione lunga tutto il mese.

Il costo medio al minuto è espresso dal rapporto:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ ovvero } g(x) = \frac{x+100}{10x}.$$

Il dominio della funzione $g(x)$ è uguale a quello della funzione $f(x)$ privato dello 0. Il grafico della funzione omografica $g(x)$, nel suo dominio naturale, è un'iperbole con l'asse y come asintoto verticale e la retta $y = \frac{1}{10}$ come asintoto orizzontale. Rappresentiamo i grafici nel primo quadrante.

Per $x > 0$, la funzione $g(x)$ tende decrescendo al valore $\frac{1}{10}$ senza assumere mai tale valore. Quindi nel dominio $]0; +\infty[$ la funzione $g(x)$ non ha estremanti relativi.

Se tuttavia consideriamo il dominio $]0; 43200]$ imposto dalla situazione concreta, la funzione $g(x)$ ammette minimo assoluto (e quindi anche relativo) nell'estremo destro del suo dominio.

Il minimo assoluto vale

$$g(43200) = \frac{43300}{432000} \simeq 0,1,$$

cioè un valore prossimo a quello dell'asintoto. Dal punto di vista dell'analisi dei consumi, l'errore che si commette a lavorare nel dominio $]0; +\infty[$ anziché nel dominio $]0; 43200]$ è trascurabile, quindi nel seguito considereremo semplicemente $x > 0$.

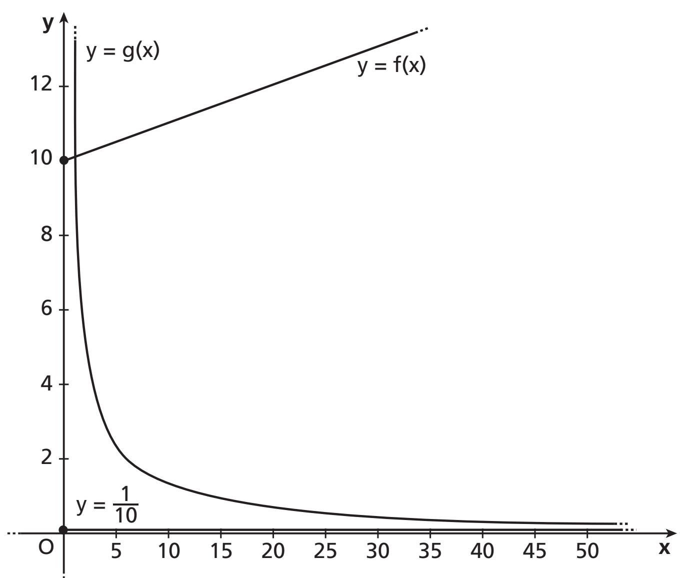


Figura 3

La funzione $g(x)$ è decrescente e quindi il costo medio al minuto diminuisce all'aumentare dei minuti di conversazione effettuati; esso tuttavia non potrà mai essere inferiore a 10 centesimi al minuto.

b. Se x_0 rappresenta il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, e quindi $g(x_0)$ il relativo costo medio per minuto, allora il valore x_1 richiesto indica il numero di minuti di conversazione che dimezzano il costo medio $g(x_0)$. Di conseguenza dovrà necessariamente essere $x_1 > x_0$.

Determiniamo x_1 in funzione di x_0.

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2} \rightarrow \frac{x_1 + 100}{10x_1} = \frac{x_0 + 100}{20x_0} \rightarrow 2x_0(x_1 + 100) = x_1(x_0 + 100) \rightarrow x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0}.$$

Scriviamo la funzione che esprime la dipendenza di x_1 da x_0 come:

$$h(x) = \frac{200x}{100 - x}.$$

Nel dominio naturale il grafico di tale funzione omografica è un'iperbole di asintoti $x = 100$ e $y = -200$. Riferita al contesto reale, rappresentiamo il grafico solo per $x > 0$.

Poiché sia le ascisse sia le ordinate rappresentano minuti di conversazione, solamente il ramo positivo dell'iperbole ha un significato reale.

Il valore 100, che individua l'asintoto verticale, è esattamente il numero di minuti di conversazione che hanno come costo medio $g(100) = \frac{1}{5} = 0,2$, esattamente il doppio di $\frac{1}{10}$, costo medio asintotico. Raggiunti o superati i 100 minuti di conversazione, il costo medio non è quindi più dimezzabile. Dunque il dominio che modellizza la situazione reale è $]0; 100[$. Più ci avviciniamo ai 100 minuti di conversazione, più il tempo x_1 necessario a dimezzare il costo al minuto tende a diventare infinitamente elevato, da cui l'andamento asintotico della funzione considerata.

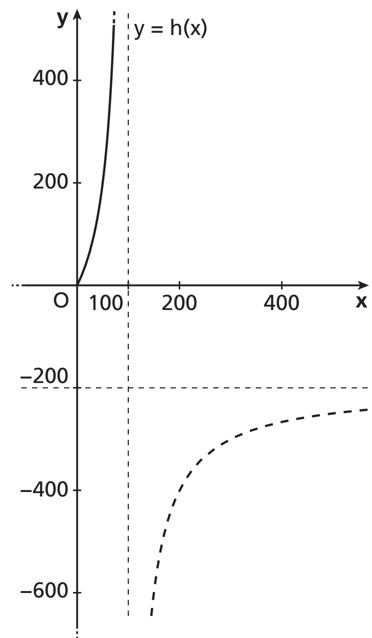


Figura 4

c. Cerchiamo una funzione del tipo

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

il cui grafico passa per i punti $A(0; 2)$, $B\left(2; \frac{7}{2}\right)$ e $C(4; 4)$.

Risolviamo il sistema ottenuto sostituendo all'equazione della funzione le coordinate dei punti noti:

$$\begin{cases} 2 = c \\ \frac{7}{2} = 4a + 2b + c \\ 4 = 16a + 4b + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ 4a + 2b = \frac{3}{2} \\ 8a + 2b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

La funzione che descrive il margine superiore della zona considerata è dunque

$$p(x) = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2, \text{ con } x \in [0; 6].$$

La funzione descrive un arco di parabola il cui vertice è proprio il punto C, come suggerisce la figura.

L'area della zona considerata, ovvero l'area sottesa dalla funzione $p(x)$ nell'intervallo $[0; 6]$, vale:

$$A_{\text{totale}} = \int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2\right) dx = \left[-\frac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^6 = 21 \text{ km}^2.$$

La regione Z priva di copertura ha area 0,5 km^2, pertanto la regione effettivamente coperta dal segnale ha area $A_{\text{coperta}} = 20,5$ km^2. Osserviamo che:

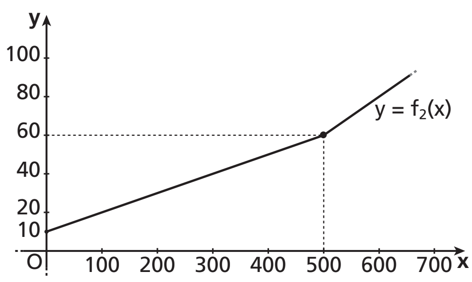
$$\frac{A_{\text{coperta}}}{A_{\text{totale}}} = \frac{20,5}{21} \simeq 0,976 = 97,6\%.$$

Tale rapporto è quindi superiore alla copertura dichiarata dal gestore (96%). L'affermazione sul sito web sottostima l'effettiva copertura, ma la differenza è a vantaggio del consumatore.

d. Dopo la modifica del piano tariffario, le funzioni diventano definite per casi, in particolare l'espressione della spesa totale dopo x minuti di conversazione diventa una funzione lineare crescente a tratti di equazione:

$$f_2(x) = \begin{cases} 10 + \dfrac{x}{10} & \text{se } 0 \leq x \leq 500 \\ 10 + \dfrac{x}{10} + \dfrac{x-500}{10} = \dfrac{x-200}{5} & \text{se } x > 500 \end{cases}.$$

La nuova funzione è continua in tutto il suo dominio, anche in 500, dove limite destro e limite sinistro coincidono col valore $f_2(500) = 60$. La funzione non è invece derivabile in tale punto in quanto la derivata sinistra è $\frac{1}{10}$, mentre la derivata destra vale $\frac{1}{5}$. La funzione $f_2(x)$ è quindi derivabile in ogni punto del dominio tranne in $x = 500$, dove è presente un punto angoloso.



■ **Figura 5**

Il costo medio al minuto aggiornato alla nuova tariffa diventa:

$$g_2(x) = \frac{f_2(x)}{x} = \begin{cases} \dfrac{x+100}{10x} & \text{se } 0 < x \leq 500 \\ \dfrac{x-200}{5x} & \text{se } x > 500 \end{cases}.$$

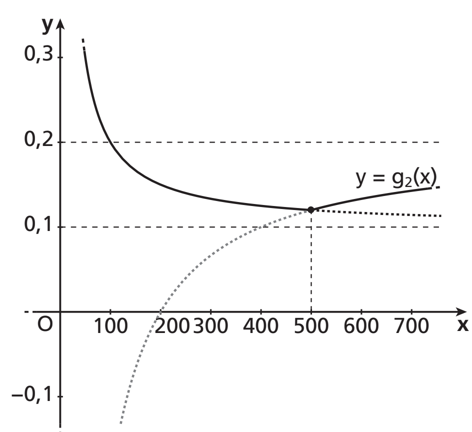
Questa funzione è continua in ogni punto del dominio, anche in 500, e vale $g_2(500) = \frac{3}{25} = 0,12$.

Il grafico di tale funzione è rappresentato da due rami di iperbole.

Rispetto alla situazione precedente, $g_2(x)$ presenta ora un nuovo asintoto orizzontale destro di equazione $y = \frac{1}{5}$, è decrescente tra 0 e 500 e crescente per $x > 500$, con un minimo assoluto in 500. La funzione non ha invece massimo assoluto né relativo.

In 500, la funzione $g_2(x)$ ha un punto angoloso e la sua derivata non è definita in tale punto. Dunque, in 500, la funzione $g_2'(x)$ ha una singolarità con salto.

Tra 0 e 500, la concavità di $g_2(x)$ è rivolta verso l'alto, quindi $g_2''(x)$ è positiva e di conseguenza $g_2'(x)$ è crescente. Per ragionamenti analoghi, $g_2'(x)$ è decrescente per $x > 500$.



■ **Figura 6**

Potevamo pervenire alle stesse conclusioni studiando la funzione:

$$g_2'(x) = \begin{cases} -\dfrac{10}{x^2} & \text{se } 0 < x < 500 \\ \dfrac{40}{x^2} & \text{se } x > 500 \end{cases}.$$

Nella situazione concreta, la funzione $f_2(x)$ che descrive la spesa totale continua a crescere, ma raddoppia la pendenza dopo i primi 500 minuti, perché da quel momento in poi raddoppia il costo al minuto. Per quanto riguarda la funzione $g_2(x)$ che descrive la spesa media al minuto, notiamo che, come per il piano tariffario precedente, decresce per i primi 500 minuti, ma poi inverte la tendenza e cresce per avvicinarsi al nuovo costo unitario di 20 centesimi al minuto.