

## PROBLEMA 2

Sia  $f$  la funzione definita da  $y(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x}$ .

1. Dimostra che la funzione possiede un unico punto di minimo e un unico punto di flesso. Calcola le coordinate del minimo e del flesso e traccia il grafico  $G_f$  della funzione;
2. dimostra che la funzione  $g(x) = (-4x - 2) \cdot e^{-2x}$  è simmetrica a  $f$  rispetto all'asse  $y$  e tracciarne il grafico  $G_g$ ;
3. detti  $P$  e  $Q$  i punti di intersezione rispettivamente del grafico  $G_f$  e del grafico  $G_g$  con l'asse  $x$ , determina l'area  $A$  della porzione di piano delimitata dal segmento  $PQ$  e dai grafici  $G_f$  e  $G_g$ ;
4. sia  $f_a$  la famiglia di funzioni definite da  $f_a(x) = (2ax - 2) \cdot e^{ax}$ , con  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Per ogni funzione  $f_a$  la tangente al grafico nel punto di flesso interseca l'asse  $x$  e l'asse  $y$  delimitando un triangolo rettangolo. Determina i valori di  $a$  per i quali tale triangolo è anche isoscele, spiegando il procedimento seguito.

---

\* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Americhe, 2015.

**PROBLEMA 2**

1. La funzione  $f(x) = (4x - 2)e^{2x}$  è continua e infinitamente derivabile su  $\mathbb{R}$ .

Studiamo la sua derivata prima per determinare i suoi eventuali punti di minimo e di massimo.

$$f'(x) = 4e^{2x} + (4x - 2) \cdot 2e^{2x} = 8xe^{2x}.$$

Otteniamo allora:

- $f'(x) = 0$  per  $x = 0$ , con  $f(0) = (4 \cdot 0 - 2)e^{2 \cdot 0} = -2$ ;
- $f'(x) > 0$  e  $f(x)$  crescente per  $x > 0$ ;
- $f'(x) < 0$  e  $f(x)$  decrescente per  $x < 0$ .

La funzione ha dunque un solo punto di minimo relativo e assoluto di coordinate  $(0; -2)$ .

Procediamo in modo analogo con la derivata seconda.

$$f''(x) = 8e^{2x} + 8x \cdot 2e^{2x} = (8 + 16x)e^{2x}.$$

Risulta:

- $f''(x) = 0$  per  $x = -\frac{1}{2}$ , con  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left[4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2\right]e^{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -4e^{-1} = -\frac{4}{e} \simeq -1,47$ ;
- $f''(x) > 0$  e  $f(x)$  volge la concavità verso l'alto per  $x > -\frac{1}{2}$ ;
- $f''(x) < 0$  e  $f(x)$  volge la concavità verso il basso per  $x < -\frac{1}{2}$ .

La funzione ha dunque un solo punto di flesso di coordinate  $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{4}{e}\right)$ .

Per disegnare il grafico  $G_f$ , determiniamo infine le intersezioni con gli assi, i limiti agli estremi del dominio e il segno della funzione:

$$f(0) = -2 \text{ come già detto;}$$

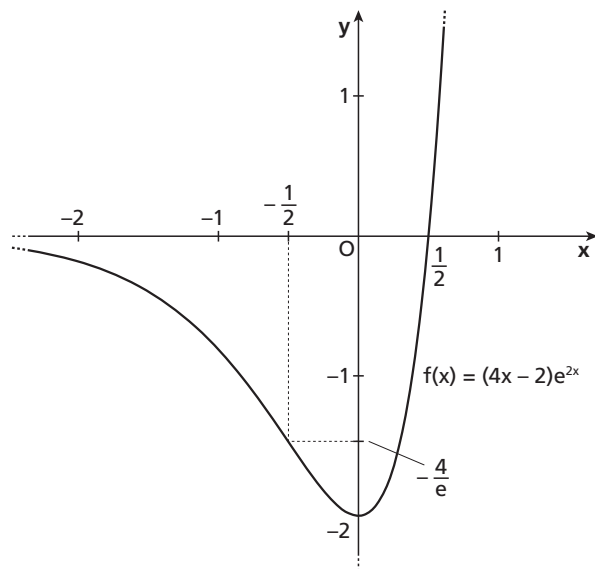
$$f(x) = 0 \rightarrow (4x - 2)e^{2x} = 0 \rightarrow 4x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x - 2)e^{2x} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - 2)e^{2x} = +\infty;$$

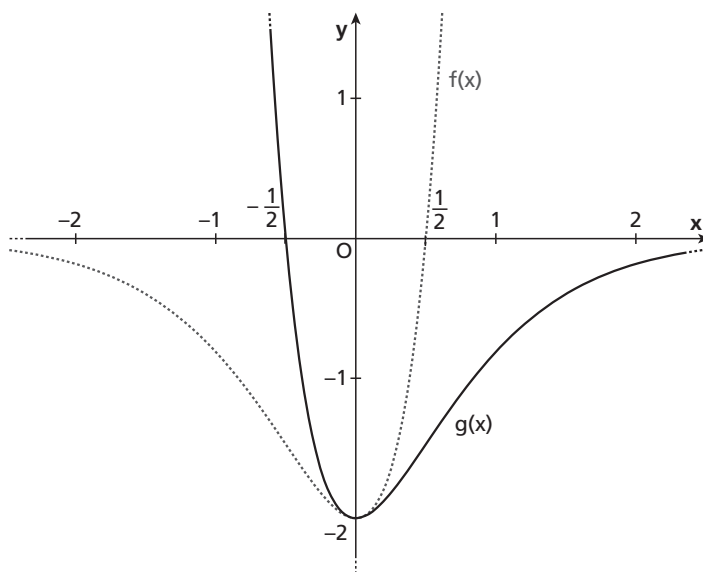
$$f(x) > 0 \rightarrow (4x - 2)e^{2x} > 0 \rightarrow 4x - 2 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Disegniamo un grafico plausibile della funzione.



■ Figura 3

2. Poiché  $g(x) = f(-x)$ , la funzione  $g(x)$  è simmetrica a  $f(x)$  rispetto all'asse  $y$ ; tracciamo il suo grafico  $G_g$  a partire dal grafico di  $f(x)$ .



■ Figura 4

3. I punti  $P$  e  $Q$  hanno coordinate  $P(\frac{1}{2}; 0)$  e  $Q(-\frac{1}{2}; 0)$ .

Per la simmetria dei grafici  $G_f$  e  $G_g$  abbiamo:

$$A = -\left(\int_{-\frac{1}{2}}^0 g(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx\right) = -2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = -2 \int_0^{\frac{1}{2}} [(4x - 2)e^{2x}] dx;$$

abbiamo anteposto il segno meno all'integrale per avere un valore positivo per l'area, visto che le funzioni sono negative nell'intervallo considerato.

Calcoliamo l'integrale indefinito corrispondente:

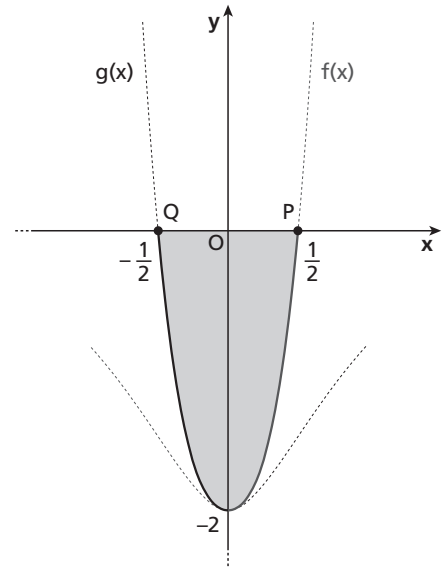
$$\begin{aligned}\int [(4x-2)e^{2x}] dx &= \int (4xe^{2x} - 2e^{2x}) dx = \\ &= \int 2x \cdot 2e^{2x} dx - \int 2e^{2x} dx = \int 2x \cdot D[e^{2x}] dx - \int D[e^{2x}] dx = \\ &= 2xe^{2x} - \int 2e^{2x} dx - e^{2x} = \\ &= 2xe^{2x} - e^{2x} - e^{2x} + c = (2x-2)e^{2x} + c,\end{aligned}$$

dove siamo ricorsi all'integrazione per parti per risolvere  $\int 4xe^{2x} dx$ .

Tornando al calcolo dell'area, otteniamo:

$$\begin{aligned}A &= -2 \int_0^{\frac{1}{2}} [(4x-2)e^{2x}] dx = -2[(2x-2)e^{2x}]_0^{\frac{1}{2}} = \\ &= -2 \left\{ \left[ \left( 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \right) e^{2 \cdot \frac{1}{2}} \right] - \left[ (2 \cdot 0 - 2) e^{2 \cdot 0} \right] \right\} = \\ &= -2(-e + 2) \simeq 1,44.\end{aligned}$$

■ Figura 5



4. Consideriamo la funzione  $f_a(x) = (2ax-2)e^{ax}$  della famiglia assegnata, con  $a \neq 0$ . Osserviamo che la funzione  $f(x)$  considerata in precedenza è la funzione della famiglia che si ottiene per  $a = 2$ , mentre  $g(x)$  si ottiene per  $a = -2$ . Più in generale, l'andamento della funzione  $f_a(x)$  è simile a quello della funzione  $f(x)$  per  $a > 0$  e a quello della funzione  $g(x)$  per  $a < 0$ . In particolare, per  $a > 0$   $f_a(x)$  è ottenuta da  $f(x)$  mediante una dilatazione o una contrazione orizzontale, per  $a < 0$   $f_a(x)$  è ottenuta da  $g(x)$  mediante una dilatazione o contrazione orizzontale:

$$f_a(x) = f(h(x)), \text{ con } h(x) = ax \text{ e } a \neq 0.$$

Determiniamo il punto di flesso di  $f_a(x)$ :

$$\begin{aligned}f'_a(x) &= 2ae^{ax} + (2ax-2) \cdot ae^{ax} = 2a^2xe^{ax}, \\ f''_a(x) &= 2a^2e^{ax} + 2a^3xe^{ax} = 2a^2(1+ax)e^{ax}.\end{aligned}$$

Poiché  $a \neq 0$  per ipotesi, risulta:

$$f''_a(x) = 0 \rightarrow 1+ax = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{a};$$

inoltre  $f''_a(x)$  cambia di segno prima e dopo  $x = -\frac{1}{a}$ , che risulta dunque l'ascissa dell'unico punto di flesso. Calcoliamo la corrispondente ordinata:

$$f_a\left(-\frac{1}{a}\right) = \left[ 2a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) - 2 \right] e^{a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)} = -4e^{-1} = -\frac{4}{e},$$

e osserviamo che il suo valore non dipende da  $a$ .

Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di  $f_a(x)$  nel punto di flesso  $F\left(-\frac{1}{a}, -\frac{4}{e}\right)$  vale:

$$f'_a\left(-\frac{1}{a}\right) = 2a^2 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) e^{a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)} = -2ae^{-1} = -\frac{2a}{e}$$

e la retta tangente ha equazione:

$$y - f_a\left(-\frac{1}{a}\right) = f'_a\left(-\frac{1}{a}\right) \cdot \left[x - \left(-\frac{1}{a}\right)\right] \rightarrow y + \frac{4}{e} = -2\frac{a}{e} \cdot \left(x + \frac{1}{a}\right) \rightarrow$$

$$y = -2\frac{a}{e}x - \frac{2}{e} - \frac{4}{e} \rightarrow y = -2\frac{a}{e}x - \frac{6}{e}.$$

Determiniamo le intersezioni della retta tangente con gli assi cartesiani.

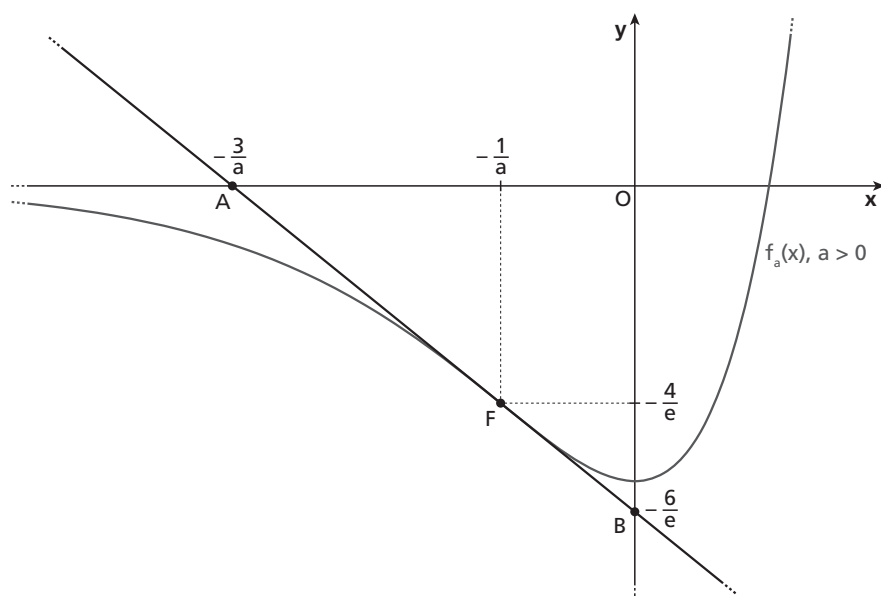
Intersezione con l'asse  $x$ :

$$\begin{cases} y = -2\frac{a}{e}x - \frac{6}{e} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow -2\frac{a}{e}x - \frac{6}{e} = 0 \rightarrow -2ax - 6 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{a} \rightarrow A\left(-\frac{3}{a}, 0\right).$$

Intersezione con l'asse  $y$ :

$$\begin{cases} y = -2\frac{a}{e}x - \frac{6}{e} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = -2\frac{a}{e} \cdot 0 - \frac{6}{e} \rightarrow y = -\frac{6}{e} \rightarrow B\left(0, -\frac{6}{e}\right).$$

Rappresentiamo la situazione relativa al caso  $a > 0$  nel disegno qui sotto, ricordando che la situazione relativa al caso  $a < 0$  si ottiene per simmetria rispetto all'asse  $y$ .



■ Figura 6

Il triangolo  $OAB$  è isoscele se i cateti  $OA$  e  $OB$  hanno la stessa lunghezza; imponendo questa condizione troviamo il valore di  $a$  cercato:

$$|x_A| = |y_B| \rightarrow \left| -\frac{3}{a} \right| = \left| -\frac{6}{e} \right| \rightarrow \frac{3}{a} = \pm \frac{6}{e} \rightarrow a = \pm \frac{e}{2}.$$

I valori di  $a$  per i quali  $OAB$  è isoscele sono due.

Per  $a = \frac{e}{2}$ , la tangente al grafico di  $f_{\frac{e}{2}}$  nel punto di flesso è parallela alla bisettrice  $y = -x$ , come in figura.

Per  $a = -\frac{e}{2}$ , la tangente al grafico di  $f_{-\frac{e}{2}}$  nel punto di flesso è parallela alla bisettrice  $y = x$ .