Liceo scientifico comunicazione opzione sportiva

PROBLEMA 1

Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, la funzione g_λ è così definita:

$$g_\lambda(x) = \frac{x-2}{x^2-\lambda}$$

e si indica con Γ_λ il suo grafico, in un riferimento cartesiano Oxy.

1. Traccia i seguenti grafici: Γ_{-5}, Γ_0, Γ_3, Γ_4 e Γ_9.

2. Stabilisci, al variare di λ in $\mathbb{R}$, se vi sono, e quanti sono, gli asintoti verticali e se vi sono massimi o minimi. Descrivi quindi, a seconda del valore di λ, qual è l'andamento della funzione g_λ, tracciandone un diagramma indicativo.

3. Dimostra che, per qualunque λ diverso da 0 da 4, la retta passante per i punti di intersezione tra Γ_λ e gli assi cartesiani è tangente a Γ_λ nel suo punto di ascissa nulla.

4. Detti A e B i punti di intersezione tra Γ_9 e gli assi cartesiani, sia $\mathcal{G}$ la regione piana delimitata dai segmenti OA e OB e dall'arco di Γ_9 di estremi A e B. Determina l'area di $\mathcal{G}$ e il volume del solido generato dalla rotazione di $\mathcal{G}$ attorno all'asse y.

PROBLEMA 1

Osservazione preliminare. Il secondo punto del problema chiede di studiare asintoti, minimi e massimi della funzione $g_\lambda(x) = \frac{x-2}{x^2-\lambda}$ al variare di λ e di tracciare i relativi grafici, mentre il primo punto chiede di tracciare i grafici delle funzioni per i valori particolari $\lambda = -5, 0, 3, 4, 9$.

Anziché studiare le 5 funzioni particolari, e poi rieseguire lo studio nel caso generale, preferiamo allora studiare prima le funzioni per λ generico, ottenendo così al contempo i risultati per i valori particolari richiesti di λ.

1. e **2.** Studiamo la funzione $g_\lambda(x)$ esaminando i casi che si possono presentare al variare di λ.

Caso $\lambda < 0$.

In questo caso, il denominatore $x^2 - \lambda$ è sempre positivo.

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x-2}{x^2-\lambda} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2}{\lambda} \end{cases} \rightarrow \left(0; \frac{2}{\lambda}\right); \qquad \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x-2}{x^2-\lambda} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow (2; 0);$$

- Segno della funzione:

$$\frac{x-2}{x^2-\lambda} > 0 \quad \rightarrow \quad x - 2 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 2.$$

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-\lambda} = 0, \text{ quindi } x = 0 \text{ è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra.}$$

- Derivata prima:

$$g'_\lambda(x) = \frac{x^2 - \lambda - (x-2)2x}{(x^2-\lambda)^2} = \frac{-x^2 + 4x - \lambda}{(x^2-\lambda)^2}.$$

Studiamo il segno:

$$g'_\lambda(x) > 0 \quad \rightarrow \quad -x^2 + 4x - \lambda > 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x + \lambda < 0.$$

L'equazione associata ammette soluzioni:

$$x^2 - 4x + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{4 - \lambda}$$

in quanto $\lambda < 0$ e il radicando è positivo.

Risulta allora:

$$g'_\lambda(x) > 0 \quad \rightarrow \quad 2 - \sqrt{4-\lambda} < x < 2 + \sqrt{4-\lambda}.$$

Compiliamo lo schema dei segni.

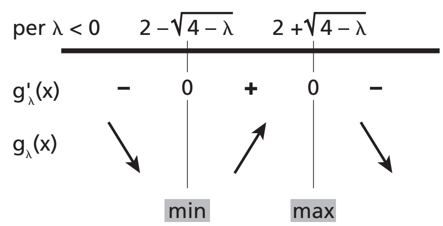


Figura 2

La funzione $g_\lambda(x)$, per $\lambda < 0$, ha un minimo di ascissa $x = 2 - \sqrt{4-\lambda}$ e un massimo di ascissa $x = 2 + \sqrt{4-\lambda}$.

- Il calcolo e lo studio del segno della derivata seconda risulta complesso e lo tralasciamo. Per le informazioni già ricavate $g_\lambda(x)$ possiamo comunque dedurre che la funzione presenta tre flessi a tangente obliqua: uno per $x < 2 - \sqrt{4-\lambda}$, uno per $x > 2 + \sqrt{4-\lambda}$ e un altro compreso fra i due valori indicati.

  Come grafico rappresentativo della classe $\lambda < 0$ disegniamo quello relativo a $\lambda = -5$, che è uno dei grafici richiesti al primo punto del problema.
  In particolare, Γ_{-5} presenta i punti di minimo e massimo rispettivamente in

  $$x = 2 - \sqrt{4-(-5)} = -1 \text{ e } x = 2 + \sqrt{4-(-5)} = 5,$$

  e interseca l'asse delle ordinate in $y = -\frac{2}{5}$.

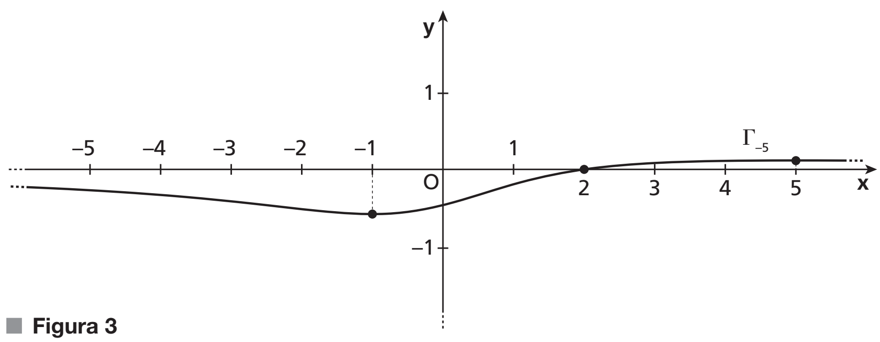


Figura 3

Caso $\lambda = 0$.

La funzione da studiare è $g_0(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$.

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x-2}{x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow (2; 0).$$

- Segno della funzione:

$$\frac{x-2}{x^2} > 0 \rightarrow x - 2 > 0 \rightarrow x > 2.$$

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio.

$\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x^2} = 0$, quindi $x = 0$ è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra.

$\displaystyle\lim_{x \to 0^\pm} \frac{x-2}{x^2} = -\infty$, quindi $x = 0$ è asintoto verticale sia a destra sia a sinistra.

- Derivata prima:

$$g_0'(x) = \frac{x^2 - (x-2)2x}{x^4} = \frac{-x^2 + 4x}{x^4} = \frac{4-x}{x^3}.$$

Compiliamo il grafico dei segni.
La funzione $g_0(x)$ non ha un minimo relativo; presenta invece un massimo relativo per $x = 4$.

per $\lambda = 0$		0		4	
$4 - x$	+		+	0	−
x^3	−	0	+		+
$g'_0(x)$	−	∄	+	0	−
$g_0(x)$	↘	∄	↗		↘
				max	

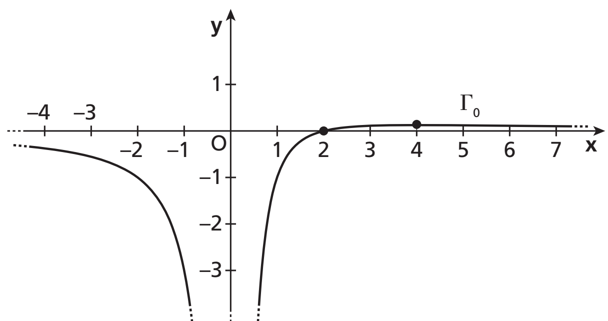
■ **Figura 4**

- Derivata seconda:

$$g_0''(x) = \frac{-x^3 - (4-x)3x^2}{x^6} = \frac{-x^3 - 12x^2 + 3x^3}{x^6} = \frac{2x^3 - 12x^2}{x^6} = \frac{2x - 12}{x^4} = 2\frac{x-6}{x^4}.$$

La derivata seconda è negativa per $x < 6$ e positiva per $x > 6$, quindi la funzione volge la concavità verso il basso per $x < 6$, verso l'alto $x > 6$.

Disegniamo il grafico Γ_0 della funzione.



■ **Figura 5**

Caso $0 < \lambda < 4$.
In questo caso il denominatore si può scomporre nella forma $x^2 - \lambda = (x - \sqrt{\lambda})(x + \sqrt{\lambda})$, con $0 < \sqrt{\lambda} < 2$. Nella funzione $g_\lambda(x) = \dfrac{x-2}{(x-\sqrt{\lambda})(x+\sqrt{\lambda})}$ il numeratore non si semplifica con alcun fattore a denominatore.

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-\sqrt{\lambda}; +\sqrt{\lambda}\}$.
- Procedendo come nel caso $\lambda < 0$ troviamo le intersezioni con gli assi: $\left(0; \dfrac{2}{\lambda}\right)$ e $(2; 0)$.
- Segno della funzione:

$$\frac{x-2}{x^2-\lambda} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x-2}{(x-\sqrt{\lambda})(x+\sqrt{\lambda})} > 0.$$

Compiliamo lo schema dei segni.
La funzione assume valori positivi per

$$-\sqrt{\lambda} < x < \sqrt{\lambda} \ \vee \ x > 2.$$

per $0 < \lambda < 4$		$-\sqrt{\lambda}$		$+\sqrt{\lambda}$		2	
$x - 2$	−		−		−	0	+
$x + \sqrt{\lambda}$	−	0	+		+		+
$x - \sqrt{\lambda}$	−		−	0	+		+
$g_\lambda(x)$	−	∄	+	∄	−	0	+

■ **Figura 6**

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio.
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-2}{x^2-\lambda} = 0$, quindi $x = 0$ è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra.

Per $x \to \pm\sqrt{\lambda}$ la funzione tende a infinito, perché il numeratore tende a un valore finito diverso da zero mentre il denominatore tende a zero. Per il teorema della permanenza del segno otteniamo:

$$\lim_{x\to-\sqrt{\lambda}^-} g_\lambda(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\sqrt{\lambda}^+} g_\lambda(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\sqrt{\lambda}^-} g_\lambda(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\sqrt{\lambda}^+} g_\lambda(x) = -\infty.$$

Le rette di equazione $x = -\sqrt{\lambda}$ e $x = \sqrt{\lambda}$ sono asintoti verticali per la funzione.

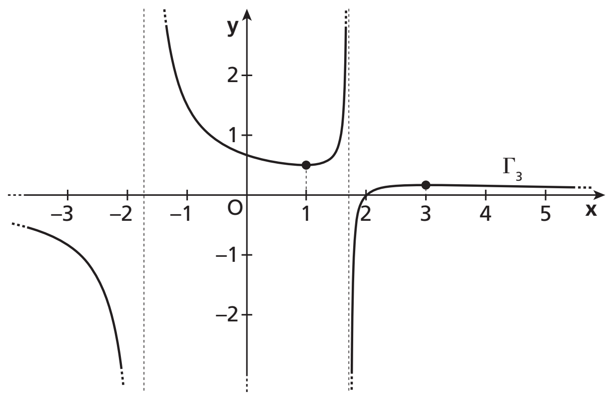
- Il calcolo della derivata prima coincide con quello svolto nel caso $\lambda < 0$; è dunque

$$g'_\lambda(x) = \frac{-x^2+4x-\lambda}{(x^2-\lambda)^2}$$

$$g'_\lambda(x) > 0 \quad \to \quad 2-\sqrt{4-\lambda} < x < 2+\sqrt{4-\lambda}.$$

Osserviamo che anche in questo caso è $\sqrt{4-\lambda} > 0$, perché $0 < \lambda < 4$.
La funzione $g_\lambda(x)$, per $0 < \lambda < 4$, ha un minimo di ascissa $x = 2-\sqrt{4-\lambda}$, (compresa fra 0 e 2) e un massimo di ascissa $x = 2+\sqrt{4-\lambda}$.

- Tralasciamo anche in questo caso il segno della derivata seconda.
Per le informazioni ricavate possiamo comunque dedurre che la funzione $g_\lambda(x)$ presenta sicuramente un flesso a tangente obliqua $x > 2+\sqrt{4-\lambda}$.
Come grafico rappresentativo della classe $0 < \lambda < 4$ disegniamo quello relativo a $\lambda = 3$.
In particolare, Γ_3 presenta i punti di minimo e massimo rispettivamente in $x = 2-\sqrt{4-3} = 1$, e $x = 2+\sqrt{4-3} = 3$, e interseca l'asse delle ordinate in $y = \frac{2}{3}$.



■ **Figura 7**

Caso $\lambda = 4$.

La funzione da studiare è $g_4(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$.

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-2; +2\}$.
Il denominatore si può scomporre, e la funzione semplificare:

$$g_4(x) = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}.$$

La funzione rimane non definita in $x = 2$, dove però presenta una discontinuità eliminabile ponendo $g_4(2) = \frac{1}{4}$. Nel seguito, consideriamo la funzione con la discontinuità eliminata.

- Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{x+2} \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \to \left(0; \frac{1}{2}\right); \qquad \begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{1}{x+2} \end{cases} \to \text{impossibile}.$$

- Segno della funzione:

$$\frac{1}{x+2} > 0 \quad \to \quad x+2 > 0 \quad \to \quad x > -2.$$

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{x^2-4}=0,\text{ quindi } x=0 \text{ è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra.}$$

$$\lim_{x\to-2^{\pm}}\frac{1}{x+2}=\pm\infty,\text{ quindi } x=-2 \text{ è asintoto verticale sia a destra sia a sinistra.}$$

- La derivata prima

$$g_4'(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}$$

è sempre negativa, quindi la funzione è sempre decrescente e non presenta minimi o massimi relativi.

- La derivata seconda

$$g_4''(x)=+\frac{2}{(x+2)^3}$$

è positiva per $x>-2$; la funzione volge la concavità verso l'alto per $x>-2$ e verso il basso per $x<-2$.

Disegniamo il grafico plausibile Γ_4.

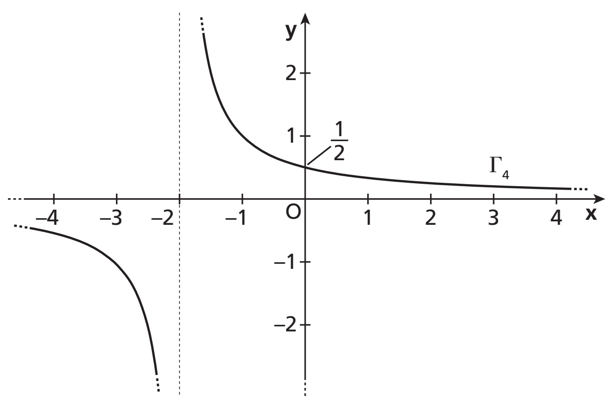


Figura 8

Caso $\lambda>4$.

Anche in questo caso il denominatore si può scomporre con la differenza di quadrati e nella funzione $g_\lambda(x)=\dfrac{x-2}{(x-\sqrt{\lambda})(x+\sqrt{\lambda})}$ il numeratore non si semplifica con alcun fattore a denominatore.

- Dominio: $\mathbb{R}-\{-\sqrt{\lambda};+\sqrt{\lambda}\}$, con $\sqrt{\lambda}>2$.
- Intersezione con gli assi: $\left(0;\dfrac{2}{\lambda}\right)$; $(2;0)$.
- Segno della funzione:

$$\frac{x-2}{x^2-\lambda}>0 \quad\to\quad \frac{x-2}{(x-\sqrt{\lambda})(x+\sqrt{\lambda})}>0.$$

Compiliamo lo schema dei segni.

La funzione assume valori positivi per

$$-\sqrt{\lambda}<x<2 \vee x>\sqrt{\lambda}.$$

per $\lambda>4$		$-\sqrt{\lambda}$		2		$+\sqrt{\lambda}$	
$x-2$	−		−	0	+		+
$x+\sqrt{\lambda}$	−	0	+		+		+
$x-\sqrt{\lambda}$	−		−		−	0	+
$g_\lambda(x)$	−	∄	+	0	−	∄	+

Figura 9

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio.

  $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{x^2-\lambda} = 0$, quindi $x = 0$ è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra.

  Come nel caso $0 < \lambda < 4$, per $x \to \pm\sqrt{\lambda}$ la funzione tende a infinito, perché il numeratore tende a un valore finito diverso da zero mentre il denominatore tende a zero. Le rette di equazione $x = -\sqrt{\lambda}$ e $x = \sqrt{\lambda}$ sono asintoti verticali per la funzione.

- La derivata prima si presenta sempre nella forma

  $$g'_\lambda(x) = \frac{-x^2+4x-\lambda}{(x^2-\lambda)^2}.$$

  In questo caso, però, il numeratore è sempre negativo (poiché $\lambda > 4$) e quindi la derivata prima è sempre negativa. La funzione $g_\lambda(x)$, per $\lambda > 4$, è sempre decrescente e non ha minimi o massimi relativi.

- Tralasciamo anche in questo caso il segno della derivata seconda; per quanto ricavato, possiamo comunque dedurre che la funzione $g_\lambda(x)$ presenta un flesso a tangente obliqua per $-\sqrt{\lambda} < x < \sqrt{\lambda}$.

  Come grafico rappresentativo della classe $\lambda > 4$ disegniamo quello relativo a $\lambda = 9$.

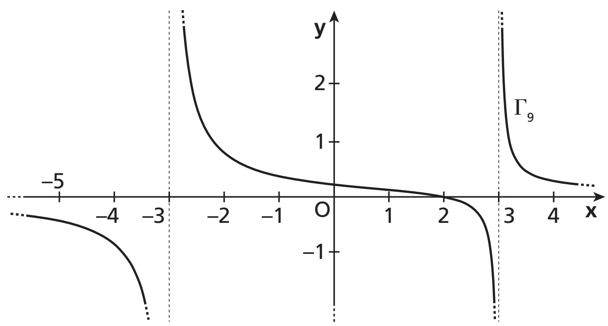


Figura 10

3. Per λ diverso da 0 e da 4, il grafico Γ_λ interseca gli assi cartesiani in $\left(0; \frac{2}{\lambda}\right)$ e $(2; 0)$. La retta r_λ che li congiunge ha equazione:

   $$r_\lambda : y = -\frac{1}{\lambda}x + \frac{2}{\lambda}.$$

   Per λ diverso da 0 e da 4, inoltre, è $g'_\lambda(x) = \frac{-x^2+4x-\lambda}{(x^2-\lambda)^2}$; il coefficiente angolare della retta tangente a Γ_λ nel punto di ascissa nulla vale dunque:

   $$g'_\lambda(0) = \frac{-\lambda}{\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda}.$$

   Il coefficiente angolare di r_λ è uguale a $g'_\lambda(0)$ e r_λ passa per il punto $\left(0; \frac{2}{\lambda}\right)$ di Γ_λ di ascissa nulla, quindi r_λ è la tangente a Γ_λ nel suo punto di ascissa nulla.

4. Nel caso particolare $\lambda = 9$, il grafico Γ_9 interseca gli assi cartesiani in $A\left(0; \frac{2}{9}\right)$ e $B(2; 0)$.

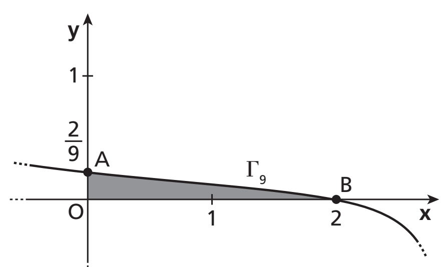


Figura 11

L'area della regione $\mathcal{G}$ sottesa al grafico di Γ_9 fra i punti A e B è data dall'integrale:

$$A=\int_0^2 \frac{x-2}{x^2-9}\,dx.$$

Sviluppiamo la funzione integranda nella forma:

$$\frac{x-2}{x^2-9}=\frac{x-2}{(x-3)(x+3)}=\frac{C}{x-3}+\frac{D}{x+3}=\frac{C(x+3)+D(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{(C+D)x+(3C-3D)}{(x-3)(x+3)}$$

da cui:

$$\begin{cases}C+D=1\\3C-3D=-2\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}C=1-D\\3-3D-3D=-2\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}C=\dfrac{1}{6}\\[2mm]D=\dfrac{5}{6}\end{cases}.$$

L'integrale dell'area diventa allora:

$$A=\int_0^2\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x+3}\right)dx=\left[\frac{1}{6}\ln|x-3|+\frac{5}{6}\ln|x+3|\right]_0^2=$$

$$\left(\frac{1}{6}\ln 1+\frac{5}{6}\ln 5\right)-\left(\frac{1}{6}\ln 3+\frac{5}{6}\ln 3\right)=\frac{5}{6}\ln 5-\ln 3\simeq 0{,}24.$$

Il volume del solido ottenuto dalla rotazione di $\mathcal{G}$ attorno all'asse y è invece dato, col metodo dei gusci cilindrici, dall'integrale:

$$V=2\pi\int_0^2 x\cdot\frac{x-2}{x^2-9}\,dx.$$

Sviluppiamo la funzione integranda:

$$x\cdot\frac{x-2}{x^2-9}=\frac{x^2-2x}{x^2-9}=\frac{x^2-2x-9+9}{x^2-9}=1+\frac{9-2x}{x^2-9}.$$

Come prima, scriviamo la frazione come somma di due frazioni con denominatori lineari:

$$\frac{9-2x}{x^2-9}=\frac{9-2x}{(x-3)(x+3)}=\frac{E}{x-3}+\frac{F}{x+3}=\frac{E(x+3)+F(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{(E+F)x+(3E-3F)}{(x-3)(x+3)},$$

$$\begin{cases}E+F=-2\\3E-3F=9\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}E=-2-F\\E-F=3\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}E=-2-F\\-2-F-F=3\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}E=\dfrac{1}{2}\\[2mm]F=-\dfrac{5}{2}\end{cases}.$$

L'integrale diventa:

$$V=2\pi\int_0^2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x+3}\right)dx=2\pi\left[x+\frac{1}{2}\ln|x-3|-\frac{5}{2}\ln|x+3|\right]_0^2=$$

$$2\pi\left[\left(2+\frac{1}{2}\ln 1-\frac{5}{2}\ln 5\right)-\left(\frac{1}{2}\ln 3-\frac{5}{2}\ln 3\right)\right]=2\pi\left(2-\frac{5}{2}\ln 5+2\ln 3\right)\simeq 1{,}09.$$