Scuole italiane all’estero • Americhe

6 Il grafico in figura è quello della derivata prima $f'(x)$ di una funzione $f(x)$ continua in $\mathbb{R}$. Il grafico riportato è simmetrico rispetto all’origine ed ha come asintoti le rette di equazione $x = 0$ e $5x + 2y = 0$.
Descrivere le principali caratteristiche relative all’andamento della funzione $f(x)$ e tracciarne, indicativamente, un possibile grafico. Tracciare inoltre il grafico della funzione $f''(x)$.

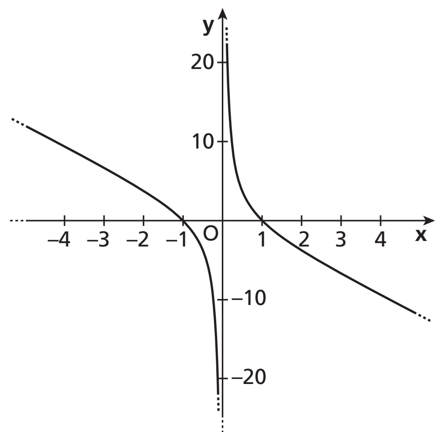


Figura 1

6 Le principali caratteristiche di $f'(x)$ e di $f(x)$ sono le seguenti:

- $f'(x)$ è una funzione dispari, quindi
  $f(x)$ è una funzione pari (simmetrica rispetto all'asse y);
- $f'(x)$ è positiva per $x<-1 \vee 0<x<1$ quindi
  $f(x)$ è crescente per $x<-1 \vee 0<x<1$;
- $f'(x)$ è negativa per $-1<x<0 \vee x>1$, quindi
  $f(x)$ è decrescente per $-1<x<0 \vee x>1$;
- $f(x)$ presenta un punto di massimo relativo in $x=-1$ e in $x=1$;
- $f'(x)$ non è definita in $x=0$, con $\lim_{x\to 0} f'(x)=\infty$; poiché $f(x)$ è continua su $\mathbb{R}$ per ipotesi, l'unica possibilità è che $f(x)$ presenti in $x=0$ una cuspide verso il basso;
- $f'(x)$ decresce per $x<0$ e per $x>0$, quindi $f''(x)<0$ per $x\neq 0$ e $f(x)$ volge la concavità verso il basso per $x<0$ e per $x>0$;
- $f'(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione $y=-\frac{5}{2}x$ per $x\to\pm\infty$, questo vuol dire che per $x\to\pm\infty$, il grafico di $f'(x)$ si avvicina sempre più e ha andamento simile al grafico di $y=-\frac{5}{2}x$. La funzione $f(x)$, per $x\to\pm\infty$, ha allora andamento simile al grafico di

  $$\int f'(x)dx=\int -\frac{5}{2}xdx=-\frac{5}{4}x^2+c,$$

  cioè per $x\to\pm\infty$, il grafico di $f(x)$ si comporta approssimativamente come il grafico della parabola rivolta verso il basso di equazione $y=-\frac{5}{4}x^2+c$.

Disegniamo un grafico plausibile per $f(x)$; osserviamo che con le informazioni raccolte non è possibile stabilire in modo univoco a quale "altezza" disegnare il grafico. Detto in altri termini, disegnato un grafico plausibile Γ per $f(x)$, anche tutti gli altri grafici che si ottengono da Γ mediante traslazione verticale rappresentano grafici plausibili per $f(x)$. Questo discende dal fatto che tutte le funzioni del tipo $f(x)+k$, con k costante, hanno per derivata la funzione assegnata $f'(x)$.

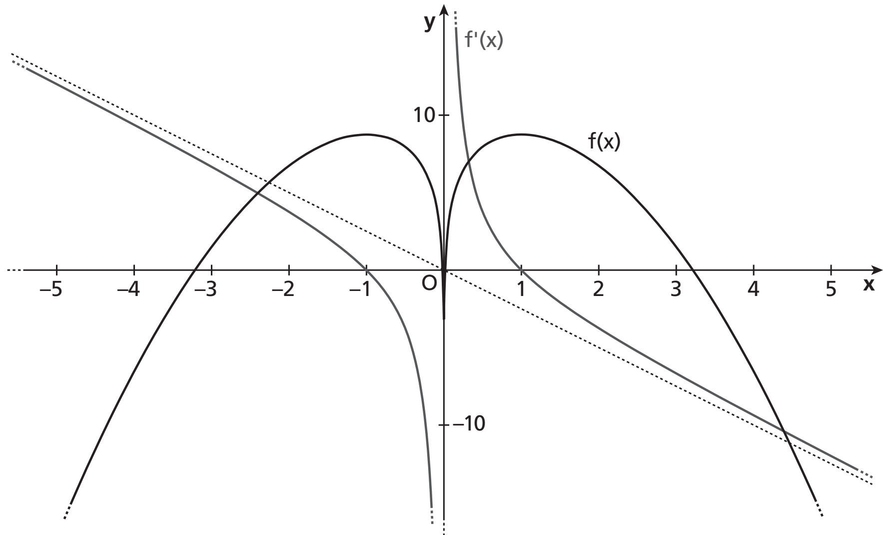
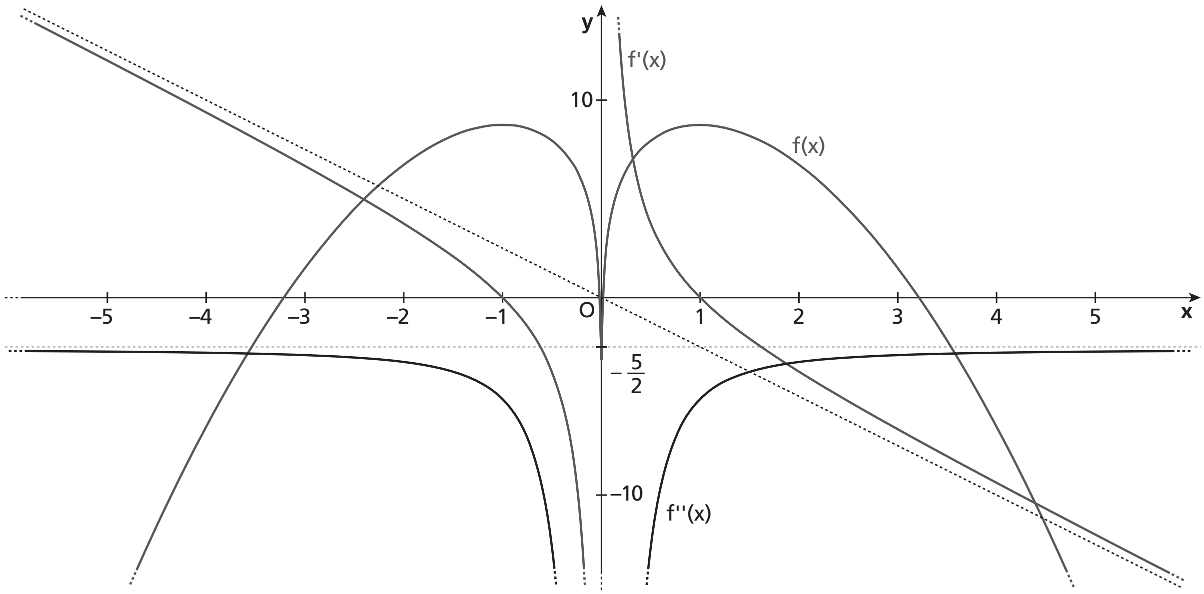


Figura 15

Ricaviamo dal grafico di $f'(x)$ le caratteristiche di $f''(x)$:

- $f'(x)$ e di conseguenza $f''(x)$ non sono definite in $x = 0$;
- $f''(x)$ è sempre negativa;
- $f'(x)$ è una funzione dispari, quindi $f''(x)$ è una funzione pari;
- $f'(x)$ ha asintoto verticale $x = 0$ con $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$, quindi $f''(x)$, che rappresenta la derivata prima di $f'(x)$ e quindi rappresenta il coefficiente angolare delle rette tangenti al grafico di $f'(x)$, tende a $-\infty$ per $x \to 0$;
- $f'(x)$ ha andamento asintotico uguale a $y = -\frac{5}{2}x$, quindi la sua derivata prima $f''(x)$, per $x \to \pm\infty$, si comporta come la derivata prima di $y = -\frac{5}{2}x$, che è $y = -\frac{5}{2}$; in conclusione, $f''(x)$ ha asintoto orizzontale $y = -\frac{5}{2}$ per $x \to \pm\infty$.

Tracciamo il grafico plausibile di $f''(x)$.



■ **Figura 16**