Liceo scientifico comunicazione opzione sportiva

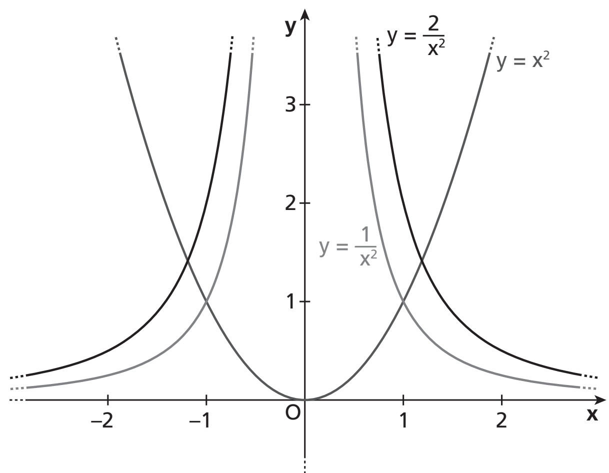
5 Quali punti del grafico della funzione

$$f(x) = \frac{2}{x^2}$$

hanno distanza minima dall'origine?

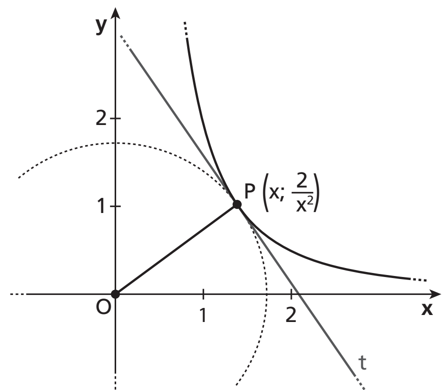
5 Rappresentiamo innanzi tutto il grafico qualitativo della funzione $f(x) = \frac{2}{x^2}$; lo possiamo ottenere tramite trasformazioni geometriche passando dalla funzione parabola $y = x^2$ al reciproco $y = \frac{1}{x^2}$, e poi tramite dilatazione verticale $y = 2 \cdot \frac{1}{x^2}$.

La funzione $f(x)$ è pari, quindi possiamo analizzare il problema per $x > 0$ ed estendere il risultato per simmetria rispetto all'asse y.



■ **Figura 7**

Dal grafico di $f(x)$ e del fascio di circonferenze $x^2 + y^2 = k$ deduciamo che esiste un solo punto $P\left(x; \frac{2}{x^2}\right)$ con $x > 0$ che ha distanza minima dall'origine, ed è quello in cui $f(x)$ risulta tangente alla circonferenza di centro O e raggio OP. Questo comporta che la retta t tangente in P al grafico di $f(x)$ risulta perpendicolare al raggio OP.



■ **Figura 8**

La retta tangente t ha coefficiente angolare:

$$m_t = f'(x) = D[2x^{-2}] = -\frac{4}{x^3};$$

il raggio OP individua una retta di coefficiente angolare:

$$m_{OP} = \frac{y_P}{x_P} = \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x^3}.$$

Per la condizione di perpendicolarità, deve essere:

$$m_t \cdot m_{OP} = -1 \quad \rightarrow \quad -\frac{4}{x^3} \cdot \frac{2}{x^3} = -1 \quad \rightarrow \quad x^6 = 8 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2} \simeq 1{,}41.$$

Pertanto, i punti del grafico di $f(x)$ che hanno distanza minima dall'origine sono $P_1(\sqrt{2}; 1)$ e, per simmetria, $P_2(-\sqrt{2}; 1)$.
In alternativa, per determinare P possiamo cercare il minimo della funzione che fornisce la distanza di P dall'origine:

$$d(x) = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{2}{x^2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^4}}.$$

Questa funzione assume valore minimo quando il radicando assume valore minimo, quindi possiamo cercare il minimo della funzione:

$$y = x^2 + \frac{4}{x^4}.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \mathrm{D}\left[x^2 + \frac{4}{x^4}\right] = \mathrm{D}\,[x^2 + 4x^{-4}] = 2x - 16x^{-5} = 2x - \frac{16}{x^5}.$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$y' > 0 \quad \rightarrow \quad 2x - \frac{16}{x^5} > 0 \quad \rightarrow \quad 2x^6 > 16 \quad \rightarrow \quad x^6 > 8 \quad \rightarrow \quad x > \sqrt[6]{8} \quad \rightarrow \quad x > \sqrt{2}\,.$$

Quindi la funzione distanza è decrescente per $0 < x < \sqrt{2}$, crescente per $x > \sqrt{2}$ e ha punto di minimo relativo e assoluto in $x = \sqrt{2}$, ottenendo i risultati precedenti.