

**PROBLEMA 1**

Considerata la funzione  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$G(x) = \int_0^{2x} e^t \sin^2(t) dt,$$

svolgi le richieste che seguono.

1. Discuti campo di esistenza, continuità e derivabilità della funzione  $G(x)$ . Individua gli intervalli di positività/negatività e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani.
2. Determina l'esistenza degli asintoti della funzione  $G(x)$ , motivando opportunamente la risposta.
3. Individua i punti stazionari della funzione  $G(x)$ , riconoscendone la tipologia, e i punti di flesso. Disegna quindi il grafico della funzione, motivando le scelte fatte.
4. Studia l'andamento dei coefficienti angolari delle rette tangenti alla funzione  $G(x)$  nei suoi punti di flesso a tangente obliqua, determinando in particolare se tali rette formano un fascio di rette parallele.

**PROBLEMA 1**

1. Consideriamo la funzione integranda

$$g(x) = e^x \sin^2 x,$$

è definita e continua per ogni  $x$  reale.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione integrale

$$H(x) = \int_0^x g(t) dt = \int_0^x (e^t \sin^2 t) dt$$

è continua e derivabile con

$$H'(x) = g(x).$$

La funzione data

$$G(x) = \int_0^{2x} (e^t \sin^2 t) dt$$

può essere allora vista come la composizione della funzione  $h(x) = 2x$  con  $H(x)$ :

$$G(x) = H(2x) = H(h(x)).$$

Poiché  $H(x)$  e  $h(x)$  sono derivabili, anche  $G(x)$  è derivabile (e definita e continua) in  $\mathbb{R}$ , con:

$$G'(x) = H'(h(x)) \cdot h'(x) = g(h(x)) \cdot h'(x) = (e^{2x} \sin^2 2x) \cdot 2 = 2e^{2x} \sin^2 2x.$$

Studiamo il segno e le intersezioni con gli assi di  $G(x)$ .

Poiché la funzione integranda  $g(x) = e^x \sin^2 x$  è sempre positiva e nulla solo nei punti  $x = k\pi$ , con  $k$  intero, la funzione  $G(x)$  risulta positiva per  $x > 0$  e negativa per  $x < 0$ . Infatti:

$$\text{per } x > 0, G(x) = \int_0^{2x} g(t) dt > 0;$$

$$\text{per } x < 0, G(x) = \int_{2x}^0 g(t) dt > 0 \rightarrow G(x) = -\int_0^{2x} g(t) dt < 0.$$

L'unico punto di intersezione del grafico di  $G(x)$  con gli assi è allora l'origine del sistema di riferimento, in quanto  $G(0) = 0$ .

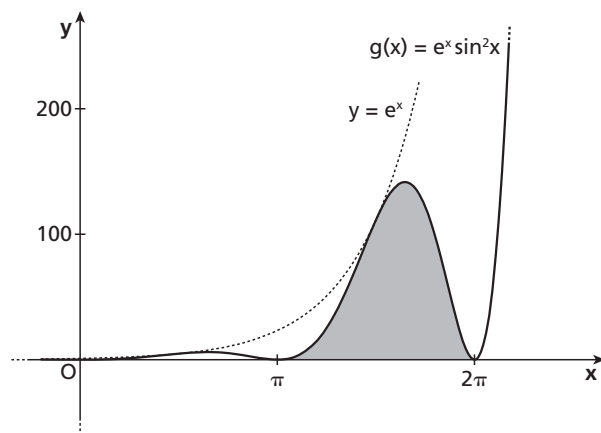
2. La funzione  $G(x)$  è continua su  $\mathbb{R}$ , quindi non ha asintoti verticali.

Stabiliamo se la funzione  $G(x)$  ammette asintoti destro o sinistro.

Per  $x > 0$ , la funzione integranda  $g(x) = e^x \sin^2 x$  oscilla fra 0 e  $e^x$ , quindi l'area sottesa da  $g(x)$  aumenta sempre più, in modo esponenziale, all'aumentare di  $x$ .

In particolare, in ogni intervallo del tipo  $[n\pi; (n+1)\pi]$  il grafico di  $g(x)$  presenta un "pinnacolo" come illustrato in figura a pagina seguente, con  $g(n\pi) = g((n+1)\pi) = 0$ .

Questi pinnacoli hanno la base di ampiezza  $\pi$  e l'altezza che segue l'andamento di  $y = e^x$ , quindi la loro area aumenta sempre più, in maniera esponenziale.



■ Figura 2

Nel calcolo di  $G(x)$ , all'aumentare di  $x$ , si vanno a sommare man mano le aree di questi pinnacoli, pertanto  $G(x)$  ha un andamento esponenziale per  $x > 0$  e non ammette asintoto per  $x \rightarrow +\infty$ .

Volendo formalizzare la situazione, cerchiamo un minorante per l'area del pinnacolo, facile da calcolare. Osserviamo che in ogni intervallo  $[n\pi; (n+1)\pi]$  è sicuramente:

$$e^x \sin^2 x \geq e^{n\pi} \sin^2 x,$$

quindi

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (e^x \sin^2 x) dx \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (e^{n\pi} \sin^2 x) dx = e^{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x dx.$$

Calcoliamo per parti l'integrale indefinito:

$$\int \sin^2 x dx = \int \sin x \cdot \sin x dx = -\cos x \cdot \sin x + \int \cos x \cdot \cos x dx = -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx \rightarrow$$

$$2 \int \sin^2 x dx = -\cos x \cdot \sin x + \int 1 dx \rightarrow \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(-\cos x \cdot \sin x + x + c).$$

L'integrale indefinito risulta allora:

$$\begin{aligned} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x dx &= \left[ \frac{1}{2}(-\cos x \cdot \sin x + x) \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \\ &= \left[ \frac{1}{2}(-\cos(n+1)\pi \cdot \sin(n+1)\pi + (n+1)\pi) \right] - \left[ \frac{1}{2}(-\cos n\pi \cdot \sin n\pi + n\pi) \right] = \\ &= \left[ \frac{1}{2}(n+1)\pi \right] - \left[ \frac{1}{2}n\pi \right] = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

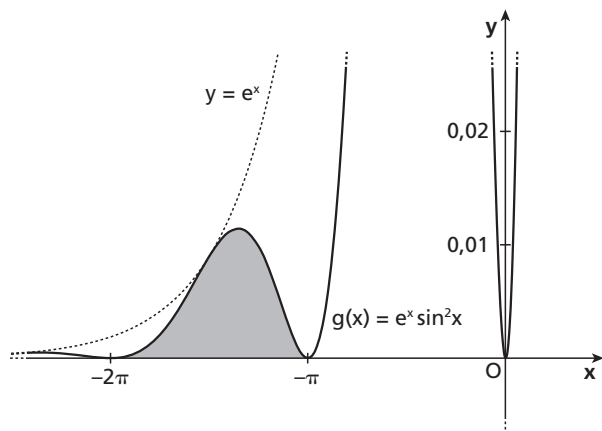
ottenendo infine la minorazione:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (e^x \sin^2 x) dx \geq e^{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{n\pi}.$$

L'area del pinnacolo relativo all'intervallo  $[n\pi; (n+1)\pi]$  è dunque maggiore di  $\frac{\pi}{2} \cdot e^{n\pi}$ , e quindi ha un andamento di tipo esponenziale man mano che gli intervalli considerati si spostano verso destra.

La funzione  $G(x)$ , che rappresenta l'area dei pinnacoli compresi nell'intervallo  $[0; 2x]$ , ha pertanto andamento esponenziale e non ammette asintoto obliquo (né, ovviamente, orizzontale).

Per  $x < 0$  potremmo procedere in maniera simile, valutando l'area dei pinnacoli e mostrare che queste aree tendono a 0 per  $x \rightarrow -\infty$ , sempre con andamento esponenziale, in modo tale che il loro contributo nel calcolo di  $G(x)$  è così ridotto da portare a un asintoto orizzontale.



■ Figura 3

Possiamo procedere però più rapidamente, osservando che

$$g(x) = e^x \sin^2 x \leq e^x,$$

quindi l'area sottesa al grafico di  $g(x)$  in  $]-\infty; 0]$  è sicuramente positiva e inferiore dell'area  $A$  sottesa a  $y = e^x$ :

$$A = \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} [e^x]_t^0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^0 - e^t) = 1.$$

Quindi, l'area sottesa dal grafico di  $g(x)$  in  $]-\infty; 0]$  è un valore  $a$  compreso fra 0 e 1.

Otteniamo allora:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^{2x} g(x) dx = \lim_{x \rightarrow -\infty} - \int_{2x}^0 g(x) dx = - \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{2x}^0 g(x) dx \right) = -a,$$

dove abbiamo scambiato gli estremi di integrazione e cambiato il segno all'integrale, perché  $x < 0$ .

La funzione  $G(x)$  presenta dunque un asintoto orizzontale sinistro di equazione  $y = -a$ , con  $-1 < -a < 0$ .

### 3. Cerchiamo i punti stazionari di $G(x)$ studiando gli zeri e il segno della derivata prima.

La derivata prima  $G'(x) = 2e^{2x} \sin^2 2x$  è sempre positiva, tranne nei punti dove si annulla:

$$G'(x) = 0 \rightarrow 2e^{2x} \sin^2 2x = 0 \rightarrow \sin 2x = 0 \rightarrow 2x = k\pi \rightarrow x = k \frac{\pi}{2},$$

con  $k$  intero.

La funzione  $G(x)$  è quindi crescente in  $\mathbb{R}$  e presenta in  $x = k \frac{\pi}{2}$  punti di flesso a tangente orizzontale.

Per i flessi, calcoliamo la derivata seconda:

$$G''(x) = D[2e^{2x} \sin^2 2x] = 2 \cdot 2e^{2x} \sin^2 2x + 2e^{2x} \cdot 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 4e^{2x} \sin 2x (\sin 2x + 2 \cdot \cos 2x).$$

Determiniamo gli zeri della derivata seconda:

$$G''(x) = 0 \rightarrow \sin 2x = 0 \vee \sin 2x + 2 \cdot \cos 2x = 0.$$

Dal primo termine ricaviamo:

$$\sin 2x = 0 \rightarrow x = k \frac{\pi}{2};$$

il secondo termine porta a:

$$\sin 2x + 2 \cdot \cos 2x = 0 \rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -2 \rightarrow \tan 2x = -2 \rightarrow$$

$$2x = \arctan(-2) + k\pi \rightarrow x = \frac{1}{2} \arctan(-2) + k \frac{\pi}{2},$$

con  $\alpha = \frac{1}{2} \arctan(-2) \simeq -0,55$ , (abbiamo diviso entrambi i membri per  $\cos 2x$  perché i punti che annullano  $\cos 2x$  non sono soluzione dell'equazione).

Studiamo ora il segno di:

$$\begin{aligned} \sin 2x(\sin 2x + 2 \cdot \cos 2x) &= \\ \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot (\tan 2x + 2), \end{aligned}$$

che coincide col segno di  $G''(x)$ .

Osservando il disegno a lato, dove sull'asse delle ascisse abbiamo riportato il valore dell'argomento  $2x$ , possiamo dedurre il segno in ogni intervallo; otteniamo:

$$\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot (\tan 2x + 2) \geq 0 \text{ per}$$

$$0 + k\pi \leq 2x \leq 2\alpha + \pi + k\pi \rightarrow$$

$$k \frac{\pi}{2} \leq x \leq \alpha + \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2}.$$

La derivata seconda  $G''(x)$  è dunque positiva, e  $G(x)$  volge la concavità verso l'alto, per

$$k \frac{\pi}{2} < x < \alpha + \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2};$$

negli altri intervalli  $G''(x)$  è negativa o nulla e  $G(x)$  volge la concavità verso il basso.

I punti di flesso hanno coordinate:

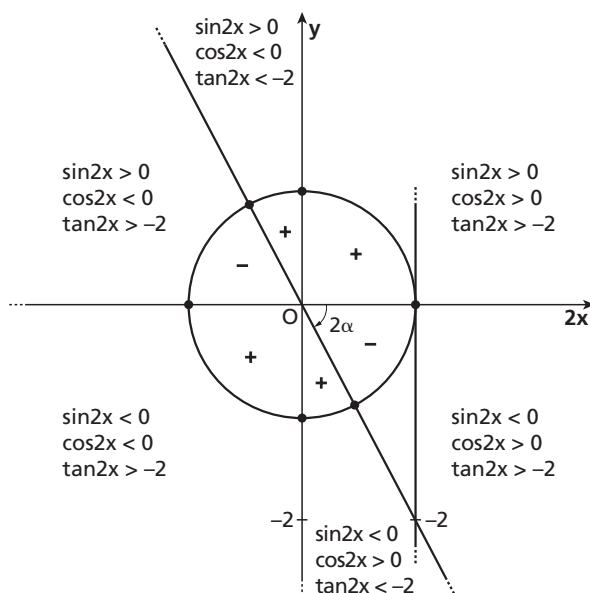
$$2x = k\pi \vee 2x = 2\alpha + k\pi \rightarrow x = k \frac{\pi}{2} \vee x = \alpha + k \frac{\pi}{2};$$

in particolare  $x = k \frac{\pi}{2}$  sono punti di flesso a tangente orizzontale,  $x = \alpha + k \frac{\pi}{2}$  sono punti di flesso a tangente obliqua.

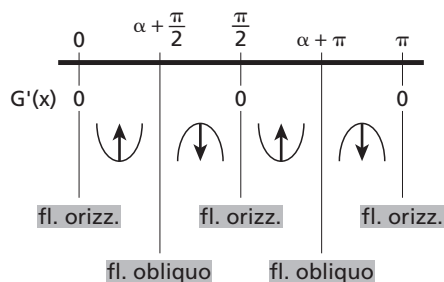
Riassumendo, la funzione  $G(x)$ :

- è negativa per  $x < 0$  e positiva per  $x > 0$ , si annulla in  $x = 0$ ;
- ha asintoto orizzontale sinistro  $y = -a$ , con  $-1 < -a < 0$ ;
- ha punti di flesso a tangente orizzontale in  $x = k \frac{\pi}{2}$ ;
- ha punti di flesso a tangente obliqua in  $x = \alpha + k \frac{\pi}{2}$ ;
- volge la concavità verso l'alto in  $k \frac{\pi}{2} < x < \alpha + \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2}$ , verso il basso altrove.

Per individuare i punti caratteristici del grafico, ricordiamo che  $\alpha \simeq -0,55$ ,  $\frac{\pi}{2} \simeq 1,57$  e  $\pi \simeq 3,14$ , quindi nell'intervallo  $[0; \pi]$  la situazione dei flessi e dei punti stazionari è schematizzata nel seguente disegno (i punti si susseguono poi con periodicità  $\pi$ ).



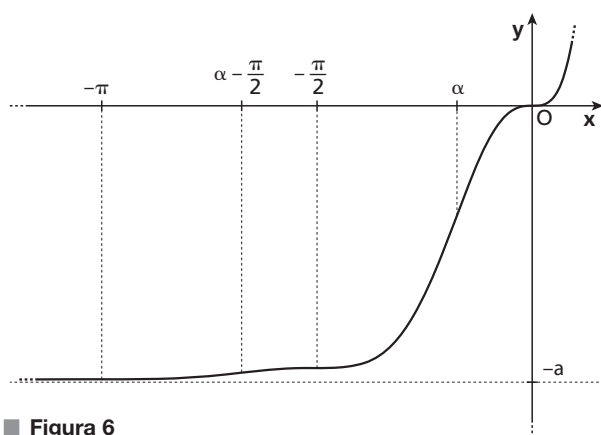
■ Figura 4



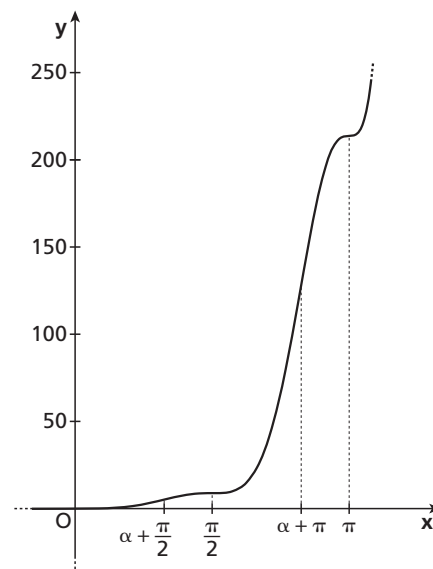
■ Figura 5

Siamo ora in grado di disegnare un grafico approssimato della funzione.

Considerati i valori in gioco (che aumentano esponenzialmente per  $x > 0$ , mentre tendono rapidamente all'asintoto orizzontale per  $x < 0$ ), disegniamo due grafici separati per  $G(x)$ .



■ Figura 6



■ Figura 7

4. I punti di flesso a tangente obliqua hanno coordinate  $x = \alpha + k\frac{\pi}{2}$ , con  $\alpha \simeq -0,55$  e  $k$  intero.

Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di  $G(x)$ , in tali punti, vale:

$$G' \left( \alpha + k\frac{\pi}{2} \right) = 2e^{2 \cdot (\alpha + k\frac{\pi}{2})} \sin^2 \left[ 2 \left( \alpha + k\frac{\pi}{2} \right) \right] = 2e^{2\alpha + k\pi} \sin^2(2\alpha + k\pi) = 2e^{2\alpha + k\pi} \sin^2 2\alpha,$$

quindi i coefficienti angolari differiscono uno dall'altro, per la presenza del fattore  $e^{2\alpha + k\pi}$  che varia al variare di  $k$ .

Le rette tangenti al grafico nei punti di flesso obliquo *non* formano un fascio di rette parallele.