Scuole italiane all'estero • Americhe

5 Il grafico di un polinomio di 3° grado è tangente all'asse x nell'origine e interseca nuovamente l'asse x in un punto di ascissa positiva. L'ascissa e l'ordinata del punto di massimo relativo sono tra loro uguali e diverse da 0. Determinare l'area della regione piana limitata che è compresa tra l'asse x e il grafico del polinomio, sapendo che anche tale area coincide numericamente con il valore comune all'ascissa e all'ordinata nel punto di massimo.

5 Un generico polinomio di terzo grado ha espressione analitica:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Determiniamo i parametri a, b, c e d imponendo le condizioni esplicitate nel quesito.

- Il grafico P del polinomio passa per l'origine:

$$p(0) = 0 \to d = 0 \to p(x) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

- Il grafico P è tangente all'asse x nell'origine:

$$p'(0) = 0, \text{ con } p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \to c = 0 \to p(x) = ax^3 + bx^2.$$

- Il grafico P interseca l'asse x in un altro punto di ascissa positiva:

$$p(x) = 0 \to ax^3 + bx^2 = 0 \to ax^2\left(x + \frac{b}{a}\right) = 0 \to x = -\frac{b}{a} \to -\frac{b}{a} > 0.$$

- Le coordinate del punto di massimo relativo sono uguali e diverse da 0.
  Determiniamo il punto di massimo relativo:

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx; \quad p'(x) = 0 \to 3ax^2 + 2bx = 0 \to ax\left(3x + \frac{2b}{a}\right) = 0 \to$$

$$3x + \frac{2b}{a} = 0 \to x = -\frac{2b}{3a},$$

che è positivo perché $-\frac{b}{a} > 0$ per un punto precedente.

Affinché il punto sia di massimo deve essere:

$$p(x) \text{ crescente, e } p'(x) > 0, \text{ a sinistra di } x = -\frac{2b}{3a}, \text{ quando } 3x + \frac{2b}{a} < 0;$$

$$p(x) \text{ decrescente, e } p'(x) < 0, \text{ a destra di } x = -\frac{2b}{3a}, \text{ quando } 3x + \frac{2b}{a} > 0.$$

Deve allora essere:

$$a < 0$$

e, per il punto precedente:

$$b > 0.$$

Imponiamo che l'ordinata del punto di massimo relativo sia uguale all'ascissa:

$$p\left(-\frac{2b}{3a}\right) = -\frac{2b}{3a} \to a\left(-\frac{2b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{2b}{3a}\right)^2 = -\frac{2b}{3a} \to a\left(-\frac{2b}{3a}\right)^2 + b\left(-\frac{2b}{3a}\right) = 1 \to$$

$$\frac{4}{9}\cancel{a}\frac{b^2}{a^{\cancel{2}}} - \frac{2}{3}\frac{b^2}{a} = 1 \to -\frac{2}{9} \cdot \frac{b^2}{a} = 1 \to a = -\frac{2}{9}b^2.$$

Il polinomio è quindi del tipo:

$$p(x) = -\frac{2}{9}b^2x^3 + bx^2, \text{ con } b > 0.$$

- Il grafico P interseca l'asse delle ascisse, oltre che in $x = 0$, anche in:

$$x = -\frac{b}{a} \to x = -b \cdot \left(\frac{-9}{2b^2}\right) = \frac{9}{2b}.$$

L'area della regione sottesa dal grafico di $p(x)$ in $\left[0; \frac{9}{2b}\right]$ è data dall'integrale:

$$A = \int_0^{\frac{9}{2b}} p(x)dx = \int_0^{\frac{9}{2b}} \left(-\frac{2}{9}b^2x^3 + bx^2\right)dx = \left[-\frac{2}{9}b^2\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{9}{2b}} =$$

$$-\frac{2}{9}b^2\frac{1}{4}\left(\frac{9}{2b}\right)^4 + b\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2b}\right)^3 = -\frac{2}{36}b^2\left(\frac{9}{2b}\right)^4 + \frac{1}{3}b\left(\frac{9}{2b}\right)^3 =$$

$$-\frac{2}{36}b^2\left(\frac{9^4}{2^4b^4}\right) + \frac{1}{3}b\,\frac{9^3}{2^3b^3} = -\frac{729}{32b^2} + \frac{243}{8b^2}.$$

Il valore di tale area deve essere numericamente uguale all'ascissa $x = -\frac{2b}{3a}$ del punto di massimo relativo. Poiché $a = -\frac{2}{9}b^2$, il punto di massimo relativo ha ascissa:

$$x = -\frac{2b}{3a} = -\frac{2}{3}b \cdot \left(-\frac{9}{2b^2}\right) = \frac{3}{b}.$$

Quindi l'area deve valere:

$$A = \frac{3}{b} \to -\frac{729}{32b^2} + \frac{243}{8b^2} = \frac{3}{b} \to -\frac{729}{32b} + \frac{243}{8b} = 3 \to \left(-\frac{729}{32} + \frac{243}{8}\right)\frac{1}{b} = 3 \to$$

$$b = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{729}{32} + \frac{972}{32}\right) \to b = \frac{1}{3}\left(\frac{243}{32}\right) \to b = \frac{81}{32}.$$

Di conseguenza a vale:

$$a = -\frac{2}{9}b^2 = -\frac{2}{9} \cdot \left(\frac{81}{32}\right)^2 = -\frac{729}{512}.$$

Il polinomio $p(x)$ cercato ha espressione:

$$p(x) = -\frac{729}{512}x^3 + \frac{81}{32}x^2.$$

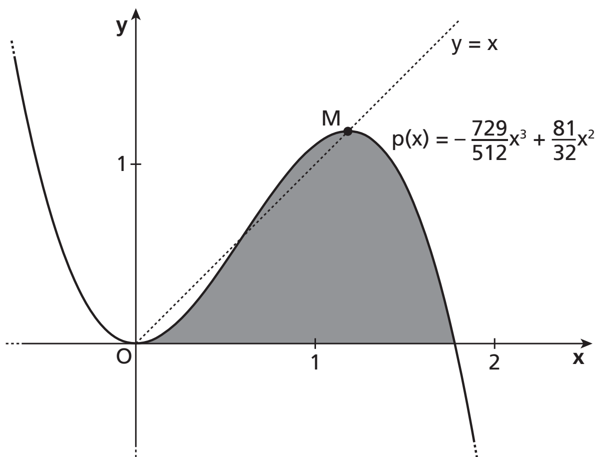

Figura 14