

## PROBLEMA 2

La funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è così definita:

$$f(x) = \sin(x) - x \cdot \cos(x).$$

1. Dimostra che  $f$  è una funzione dispari, che per  $x \in ]0; \pi]$  si ha  $f(x) > 0$  e che esiste un solo valore  $x_0 \in ]0; 2\pi]$  tale che  $f(x_0) = 0$ . Traccia inoltre il grafico della funzione per  $x \in [0; 5\pi]$ .
2. Determina il valore dell'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

e, sapendo che risulta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

prova che risulta verificata la disequazione:

$$\pi^3 + 18\pi < 96$$

anche non conoscendo il valore di  $\pi$ .

3. Verifica che, qualsiasi sia  $n \in \mathbb{N}$ , risulta:

$$\int_0^{(2n+1)\pi} f(x) dx = 4, \quad \int_0^{2n\pi} f(x) dx = 0.$$

4. Dimostra che i massimi della funzione  $f^2(x)$  giacciono su una parabola e i minimi su una retta, e scrivi l'equazione della parabola e della retta.

**PROBLEMA 2**

1. Considerata  $f(x) = \sin x - x \cos x$ , calcoliamo:

$$f(-x) = \sin(-x) - (-x)\cos(-x) = -\sin x + x \cos x = -(\sin x - x \cos x) = -f(x),$$

quindi la funzione  $f(x)$  è dispari.

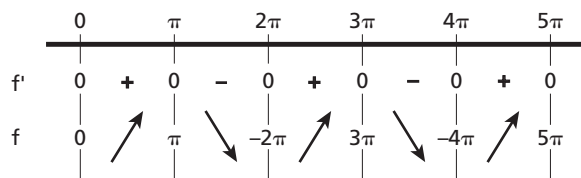
Determiniamo il segno della funzione ricorrendo allo studio della derivata prima:

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x.$$

Osservato che  $y = x$  e  $y = \sin x$  sono positive in  $]0; \pi[$ , e  $y = \sin x$  è nulla per  $x = \pi$ , otteniamo  $f'(x) > 0$  in  $]0; \pi[$  e  $f'(\pi) = 0$ . La funzione  $f(x)$  è dunque crescente in  $]0; \pi[$  e ha un punto stazionario in  $x = \pi$ . Poiché  $f(0) = 0$ , deduciamo che  $f(x) > 0$  nell'intervallo  $]0; \pi[$ .

Per l'intervallo  $]\pi; 2\pi[$  possiamo invece fare i seguenti ragionamenti:  $f'(x) < 0$  in  $]\pi; 2\pi[$  e  $f'(2\pi) = 0$ . La funzione  $f(x)$  è dunque decrescente in  $]\pi; 2\pi[$  e ha un punto stazionario in  $x = 2\pi$ , con  $f(2\pi) = -2\pi$ . Quindi  $f(\pi) > 0$ ,  $f(2\pi) < 0$  e  $f(x)$  è decrescente in  $]\pi; 2\pi[$ : per il primo teorema di unicità dello zero, esiste un solo punto  $x_0 \in ]\pi; 2\pi[$  tale che  $f(x_0) = 0$ . Poiché  $f(x)$  non ha zeri in  $]0; \pi[$ , rimane dimostrato che lo zero di  $f(x)$  in  $]0; 2\pi[$  è unico.

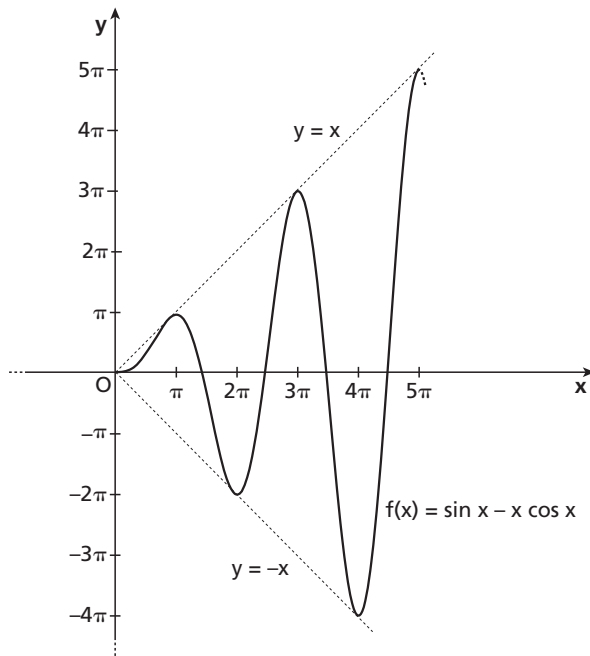
Per disegnare il grafico di  $f(x)$  per  $x \in [0; 5\pi]$ , estendiamo a questo intervallo lo studio della crescita e della decrescenza della funzione.



■ Figura 5

Osserviamo che i minimi e i massimi relativi della funzione  $f(x)$  interni all'intervallo  $[0; 5\pi]$  giacciono sulle rette di equazione rispettivamente  $y = -x$  e  $y = x$ . Infatti i minimi relativi sono  $(2\pi; -2\pi)$  e  $(4\pi; -4\pi)$  e i massimi relativi sono  $(\pi; \pi)$  e  $(3\pi; 3\pi)$ . Inoltre anche in  $x = 0$  e in  $x = 5\pi$ , la tangente al grafico della funzione è orizzontale, essendo  $f'(0) = f'(5\pi) = 0$ . Con le informazioni note possiamo

tracciare un grafico approssimativo della funzione  $f(x)$ , tralasciando lo studio della derivata seconda.



■ Figura 6

2. Prima di calcolare l'integrale definito, calcoliamo per parti l'integrale del termine  $x \cos x$ :

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c.$$

L'integrale definito risulta allora:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - x \cos x) dx = [-\cos x - (x \sin x + \cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = [-2 \cos x - x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \left(-2 \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}\right) - (-2 \cos 0 - 0 \cdot \sin 0) = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Per dimostrare la disuguaglianza  $\pi^3 + 18\pi < 96$ , osserviamo che in  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  la funzione  $f(x)$  è crescente, con  $f(0) = 0$  e  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ . Risulta quindi  $0 \leq f(x) \leq 1$  in  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  e pertanto  $f^2(x) \leq f(x)$  in  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . In particolare è  $f^2(x) < f(x)$  in  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ .

Passando agli integrali otteniamo allora:

$$\begin{aligned} f^2(x) \leq f(x) &\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \rightarrow \frac{x^3}{48} - \frac{\pi}{8} < 2 - \frac{\pi}{2} \rightarrow \\ \frac{\pi^3 - 6\pi + 24\pi}{48} &< \frac{96}{48} \rightarrow \pi^3 + 18\pi < 96. \end{aligned}$$

3. Ricordando che, per il calcolo precedente, è  $\int f(x) dx = -2 \cos x - x \sin x + c$ , otteniamo  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{(2n+1)\pi} f(x) dx &= [-2 \cos x - x \sin x]_0^{(2n+1)\pi} = \\ &= [-2 \cos[(2n+1)\pi] - (2n+1)\pi \cdot \sin[(2n+1)\pi]] - (-2 \cos 0 - 0 \cdot \sin 0) = +2 + 2 = 4; \end{aligned}$$

$$\int_0^{2n\pi} f(x) dx = [-2 \cos x - x \sin x]_0^{2n\pi} =$$

$$[-2 \cos 2n\pi - 2n\pi \cdot \sin 2n\pi] - (-2 \cos 0 - 0 \cdot \sin 0) = -2 + 2 = 0.$$

4. I ragionamenti fatti al punto 1 per la funzione  $f(x)$  per l'intervallo  $[0; 5\pi]$  si possono estendere a tutto  $\mathbb{R}$ :

- $f(x)$  si annulla in  $x = 0$  e una e una sola volta in ogni intervallo del tipo  $]k\pi; (k+1)\pi[$ , con  $k \in \mathbb{Z} - \{-1; 0\}$ ;
- $f(x)$  presenta minimi o massimi relativi in corrispondenza di  $x = k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , e  $|f(k\pi)| = |k| \pi$ .

Per la funzione  $f^2(x)$  possiamo allora dire che:

- $f^2(x) \geq 0$  su  $\mathbb{R}$  ed è continua e derivabile in  $\mathbb{R}$ ;
- $f^2(x)$  si annulla dove si annulla  $f(x)$ , quindi in  $x = 0$  e una e una sola volta in ogni intervallo del tipo  $]k\pi; (k+1)\pi[$ , con  $k \in \mathbb{Z} - \{-1; 0\}$ ;
- $D[f^2(x)] = 2f(x) \cdot f'(x)$ , quindi i punti di massimo e minimo relativi vanno cercati tra gli zeri di  $f(x)$  e di  $f'(x)$ . Gli zeri di  $f(x)$  sono punti di minimo di  $f^2(x)$ , quindi i massimi relativi di  $f^2(x)$  sono tra gli zeri di  $f'(x)$ . In particolare,  $f^2(x)$  presenta massimi relativi in corrispondenza di  $x = k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , e  $f^2(k\pi) = (k\pi)^2$ .

Dunque i minimi di  $f^2(x)$  giacciono sull'asse delle ascisse, mentre i massimi di  $f^2(x)$  giacciono sulla parabola di equazione  $y = x^2$ .