Liceo scientifico e opzione scienze applicate

1 Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $y = 3$ della regione di piano delimitata dalla curva di equazione $y = x^3 - 3x + 3$ e dalla retta stessa.

1 Individuiamo la regione compresa fra il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x + 3$ e la retta di equazione $y = 3$.

La funzione $f(x)$ ha dominio $\mathbb{R}$ e non è né pari né dispari. È una funzione polinomiale di terzo grado, quindi, oltre a non avere asintoti orizzontali e verticali, non ha asintoti obliqui.

Cerchiamo le intersezioni fra grafico della funzione e retta.

$$f(x) = 3 \rightarrow x^3 - 3x + 3 = 3 \rightarrow x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow$$

$$x = -\sqrt{3} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{3}.$$

Il grafico di $f(x)$ interseca la retta di equazione $y = 3$ in $(-\sqrt{3}; 3)$, $(0; 3)$, $(\sqrt{3}; 3)$.

La derivata prima della funzione

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

assume valori positivi per $x < -1 \vee x > 1$ e negativi per $-1 < x < 1$.
Dunque $f(x)$ è crescente per $x < -1 \vee x > 1$ e decrescente per $-1 < x < 1$.

La funzione ha un massimo relativo in $(-1; 5)$ e un minimo relativo in $(1; 1)$.

La derivata seconda $f''(x) = 6x$ assume valori positivi per $x > 0$ e negativi per $x < 0$. Quindi $f(x)$ ha la concavità verso l'alto per $x > 0$ e verso il basso per $x < 0$.

Disegniamo il grafico approssimativo della funzione $f(x)$ e della retta $y = 3$, individuando la regione R da ruotare.

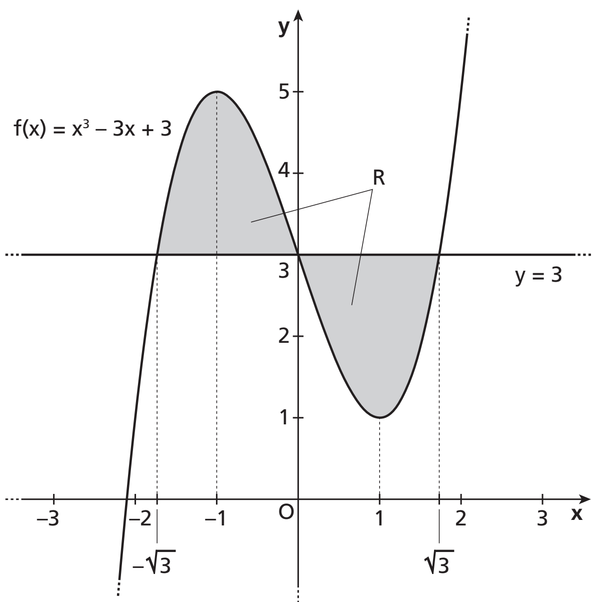

Figura 7

Il volume del solido generato dalla rotazione di R attorno alla retta di equazione $y = 3$ è dato dall'integrale:

$$V = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} [f(x) - 3]^2 dx = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x)^2 dx = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^6 - 6x^4 + 9x^2) dx =$$

$$\pi \left[\frac{1}{7} x^7 - \frac{6}{5} x^5 + 3x^3 \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} =$$

$$\pi \left\{ \left[\frac{1}{7} (\sqrt{3})^7 - \frac{6}{5} (\sqrt{3})^5 + 3(\sqrt{3})^3 \right] - \left[\frac{1}{7} (-\sqrt{3})^7 - \frac{6}{5} (-\sqrt{3})^5 + 3(-\sqrt{3})^3 \right] \right\} =$$

$$\pi \left[\left(\frac{27}{7} \sqrt{3} - \frac{54}{5} \sqrt{3} + 9\sqrt{3} \right) - \left(-\frac{27}{7} \sqrt{3} + \frac{54}{5} \sqrt{3} - 9\sqrt{3} \right) \right] =$$

$$\pi \left(\frac{54}{7} - \frac{108}{5} + 18 \right) \sqrt{3} = \pi \frac{270 - 756 + 630}{35} \sqrt{3} = \pi \frac{144}{35} \sqrt{3} \simeq 22{,}39.$$