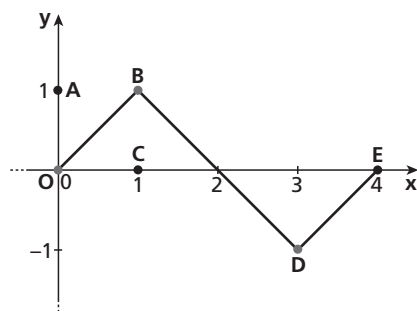


## PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodica di periodo  $T = 4$  il cui grafico, nell'intervallo  $[0; 4]$ , è il seguente:



■ Figura 1

Come si evince dalla figura, i tratti  $OB$ ,  $BD$ ,  $DE$  del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate:  $O(0; 0)$ ;  $B(1; 1)$ ;  $D(3; -1)$ ;  $E(4; 0)$ .

1. Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione  $f$  è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x};$$

qualora esistano, determinarne il valore.

Rappresenta inoltre, per  $x \in [0; 4]$ , i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x),$$

$$h(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

2. Considera la funzione:

$$s(x) = \sin(bx)$$

con  $b$  costante reale positiva; determina  $b$  in modo che  $s(x)$  abbia lo stesso periodo di  $f(x)$ . Dimostra che la porzione quadrata di piano  $OABC$  in figura viene suddivisa dai grafici di  $f(x)$  e  $s(x)$  in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato  $OABC$  ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3. Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \text{ e } s(x)^2$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4. Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse  $y$  della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione  $h$  per  $x \in [0; 3]$  e l'asse delle  $x$ .

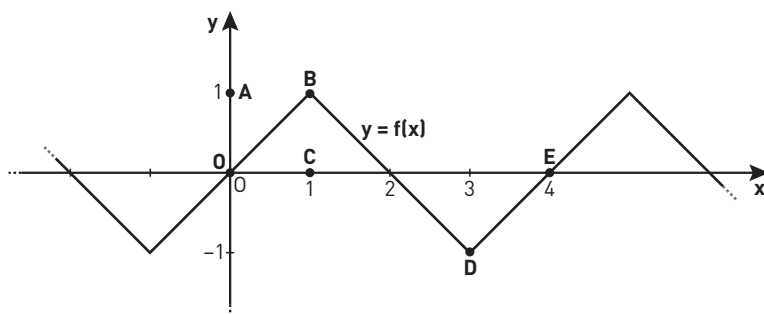
**PROBLEMA 2**

1. La funzione  $f(x)$  si può scrivere in  $[0; 4]$  come

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0; 1[ \\ -x + 2 & \text{se } x \in [1; 3[ \\ x - 4 & \text{se } x \in [3; 4] \end{cases}$$

Disegniamo il grafico nel dominio  $\mathbb{R}$  e osserviamo che  $f(x)$  si può scrivere come

$$f(x) = \begin{cases} x - 4k & \text{se } x \in [-1 + 4k; 1 + 4k[ \\ -x + 2 + 4k & \text{se } x \in ]1 + 4k; 3 + 4k[ \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$



■ Figura 7

Questa funzione è definita e continua in tutto il dominio  $\mathbb{R}$  perché continua a tratti e il limite destro e sinistro nei punti di congiunzione coincidono. La funzione  $f(x)$  è inoltre derivabile negli intervalli aperti  $] -1 + 4k; 1 + 4k[$  e  $]1 + 4k; 3 + 4k[$  perché i polinomi sono funzioni derivabili. Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in ] -1 + 4k; 1 + 4k[ \\ -1 & \text{se } x \in ]1 + 4k; 3 + 4k[ \end{cases}$$

Verifichiamo la derivabilità in  $]0; 4[$  nei punti di congiunzione  $x = 1$ ,  $x = 3$  analizzando i limiti della derivata prima da destra e da sinistra.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 1$$

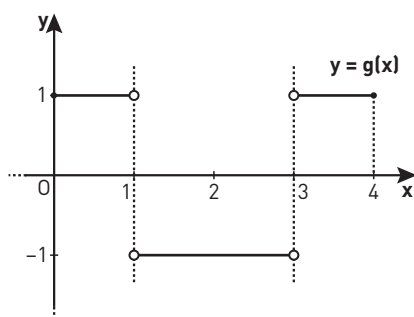
Osserviamo che i limiti destri e sinistri non coincidono, quindi  $f(x)$  non è derivabile in  $x = 1$  e  $x = 3$ . Per periodicità possiamo affermare che  $f(x)$  non è derivabile nei punti  $x = 1 + 4k$  e  $x = 3 + 4k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , ovvero nei punti  $x = 1 + 2k'$ , con  $k' \in \mathbb{Z}$ .

Poiché  $f(x)$  è una funzione periodica non costante, il limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  non esiste.

Per calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  si può utilizzare il teorema del confronto. Infatti, dato che  $-1 \leq f(x) \leq 1$ ,

si ha che  $-\frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$  per  $x > 0$ . Ne risulta che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

Disegniamo il grafico di  $g(x) = f'(x)$ , di cui abbiamo già calcolato l'espressione analitica.



■ Figura 8

Determiniamo l'espressione analitica di  $h(x)$  per  $x \in [0; 4]$ , considerando i tre sottointervalli  $[0; 1]$ ,  $]1; 3]$  e  $]3; 4]$ .

- Per  $x \in [0; 1]$ ,  $h(x) = \int_0^x t \, dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2}{2}$

- Per  $x \in ]1; 3]$ ,

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^1 f(t) \, dt + \int_1^x (2-t) \, dt = \\ &= h(1) + \left[ 2t - \frac{t^2}{2} \right]_1^x = \\ &= \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 \end{aligned}$$

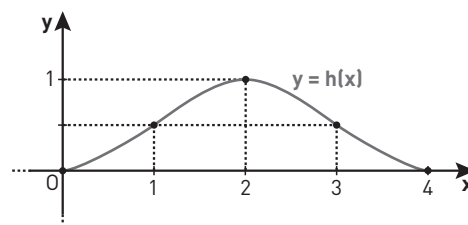
- Per  $x \in ]3; 4]$ ,

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^3 f(t) \, dt + \int_3^x (t-4) \, dt = \\ &= h(3) + \left[ \frac{t^2}{2} - 4t \right]_3^x = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x - \frac{9}{2} + 12 = \frac{x^2}{2} - 4x + 8 \end{aligned}$$

Quindi l'espressione analitica per  $h(x)$  è la seguente:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{se } x \in [0; 1] \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & \text{se } x \in ]1; 3] \\ \frac{x^2}{2} - 4x + 8 & \text{se } x \in ]3; 4] \end{cases}$$

Il grafico è composto da tre archi di parabola che si raccordano nei punti  $(1; \frac{1}{2})$  e  $(3; \frac{1}{2})$ .



■ Figura 9

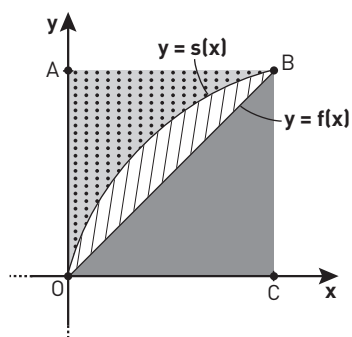
In alternativa, è possibile disegnare un grafico qualitativo di  $h(x)$ , osservando che la funzione integrale di funzioni lineari a tratti è formata da archi di parabola la cui concavità dipende dal segno di  $g(x) = h''(x)$  e che l'area di ogni triangolo congruente a  $OBC$  è uguale a  $\frac{1}{2}$ .

2. Il periodo di  $f(x)$  è 4, mentre il periodo di  $s(x) = \sin(bx)$  è  $\frac{2\pi}{b}$ . Ponendo  $\frac{2\pi}{b} = 4$  si ottiene

$$b = \frac{\pi}{2}.$$

I grafici di  $f(x)$  e  $s(x)$  dividono il quadrato  $OABC$  in tre parti in quanto  $f(0) = s(0) = 0$  e  $f(1) = s(1) = 1$  e i grafici di  $f(x)$  e  $s(x)$  non hanno altri punti di intersezione in  $]0; 1[$ . Dimostriamo quest'ultima affermazione.

Il grafico di  $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  è una contrazione orizzontale di  $\sin x$  di fattore  $\frac{2}{\pi}$ . La funzione  $\sin(x)$  sta sopra la retta congiungente il punto  $(0; 0)$  e il punto  $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ . Quindi il grafico di  $s(x)$  in  $[0; 1]$  sta sopra la funzione  $f(x) = x$  e di conseguenza i due grafici non si intersecano in altri punti.



■ Figura 10

Dato che l'area del quadrato  $OABC$  è uguale a 1, la probabilità di cadere su una delle tre parti sarà uguale alla misura della rispettiva area.

Calcoliamo quindi le aree.

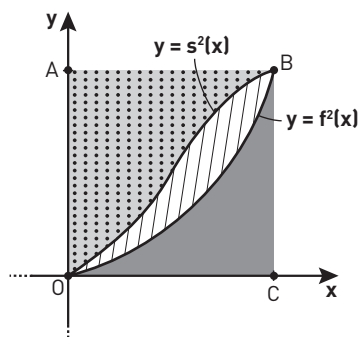
$$A_{\text{grigia}} = \int_0^1 x \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$A_{\text{tratteggiata}} = \int_0^1 \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x \right] dx = \left[ -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \simeq 0,14$$

$$A_{\text{pallini}} = 1 - A_{\text{grigia}} - A_{\text{tratteggiata}} = 1 - \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\pi} \simeq 0,36.$$

Le probabilità di cadere nelle zone grigia, tratteggiata e pallini sono quindi rispettivamente del 50%, del 14% circa e del 36% circa.

- c. Rappresentiamo le funzioni  $f^2(x) = x^2$  e  $s^2(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  nell'intervallo  $[0; 1]$ , osservando che, essendo  $0 \leq f(x) \leq 1$  e  $0 \leq s(x) \leq 1$ , si avrà  $f^2(x) \leq f(x)$  e  $s^2(x) \leq s(x)$ .



■ Figura 11

Quindi si avrà un aumento dell'area pallini e una diminuzione dell'area grigia; per quanto riguarda l'area tratteggiata è difficile fare una stima qualitativa.

Calcoliamo quindi le probabilità, ancora una volta uguali alle rispettive aree.

Per calcolare l'integrale di  $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  utilizzeremo la formula di bisezione  $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ .

$$A_{\text{grigia}} = \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \simeq 0,33$$

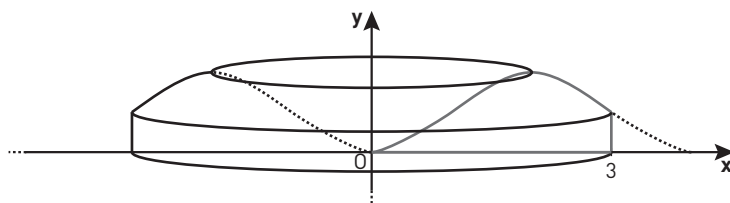
$$\begin{aligned} A_{\text{tratteggiata}} &= \int_0^1 \left[ \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^2 \right] dx = \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx - \int_0^1 x^2 dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1 - \cos(\pi x)}{2} dx - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \int_0^1 [1 - \cos(\pi x)] dx - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [x]_0^1 - \frac{1}{\pi} [\sin(\pi x)]_0^1 \right\} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\pi} (\sin \pi - \sin 0) \right] - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \simeq 0,17 \end{aligned}$$

$$A_{\text{pallini}} = 1 - A_{\text{grigia}} - A_{\text{tratteggiata}} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Le probabilità di cadere nelle zone grigia, tratteggiata e pallini sono quindi rispettivamente del 33% circa, del 17% circa e del 50%.

4. Per calcolare il volume del solido di rotazione utilizziamo il metodo dei gusci cilindrici.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^3 x h(x) dx = \\ &= 2\pi \left[ \int_0^1 x \frac{x^2}{2} dx + \int_1^3 x \left( -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 \right) dx \right] = \\ &= 2\pi \left\{ \left[ \frac{x^4}{8} \right]_0^1 + \left[ -\frac{x^4}{8} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^3 \right\} = \\ &= 2\pi \left( \frac{1}{8} - \frac{81}{8} + 18 - \frac{9}{2} + \frac{1}{8} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{83}{12} \pi \end{aligned}$$



■ Figura 12