Liceo scientifico comunicazione opzione sportiva

PROBLEMA 1

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}.$$

1. Prova che f è una funzione pari e che essa è derivabile in $x = 0$. Dimostra inoltre che la funzione f ha un massimo assoluto in $x = 0$.

2. Traccia, in uno stesso diagramma, i grafici indicativi delle tre funzioni

$$y = f(x), \qquad y = \frac{1}{x}, \qquad y = -\frac{1}{x},$$

e mostra che il grafico di f è tangente agli altri due in infiniti punti. È vero che tali punti di tangenza sono anche massimi o minimi relativi della funzione f?

3. Detta R_0 la regione piana di area finita delimitata dal grafico di f, dall'asse x e dall'asse y, si indica con V_0 il volume del solido generato ruotando R_0 intorno all'asse y. Si indica inoltre con R_n la regione piana delimitata dal grafico di f e dal tratto dell'asse x compreso tra $n\pi$ e $(n+1)\pi$, qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$, e con V_n il volume del rispettivo solido di rotazione. Dimostra che risulta:

$$V_0 = V_n = 4\pi.$$

4. Sia definita la funzione:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Tenuto conto del fatto che

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2},$$

traccia un grafico indicativo dell'andamento della funzione F, individuandone, in particolare, le ascisse dei punti di massimo e di minimo[1].

---

1. La primitiva della funzione f non è esprimibile tramite le usuali funzioni analitiche.

PROBLEMA 1

1. La funzione

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 1 & \text{se } x=0\end{cases}$$

ha dominio $\mathbb{R}$. Ricordando che la funzione $\sin x$ è dispari, otteniamo:

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x), \text{ per } x\neq 0,$$

quindi $f(x)$ è pari.

La funzione è continua in $x=0$, in quanto applicando il limite notevole troviamo:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=f(0).$$

La funzione è inoltre derivabile per $x\neq 0$, con:

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

Per mostrare che $f(x)$ è derivabile in $x=0$, mostriamo allora che esiste finito il limite $\lim_{x\to 0} f'(x)$ e applichiamo poi il criterio di derivabilità in $x=0$.

Il limite

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, che risolviamo ricorrendo al teorema di De L'Hospital dopo aver verificato che le funzioni al numeratore e denominatore verificano le ipotesi del teorema:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos x}-x\sin x\cancel{-\cos x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0.$$

Per il criterio di derivabilità, poiché la funzione è continua in $x=0$ ed è derivabile in un suo intorno con $\lim_{x\to 0} f'(x)=0$, otteniamo che la funzione è derivabile anche in $x=0$ con $f'(0)=0$.

Possiamo allora scrivere:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}.$$

Per quanto riguarda il massimo assoluto di $f(x)$ notiamo che:

- per $x=0$ è $f(0)=1$;
- per $|x|>1$ è $\left|\frac{\sin x}{x}\right|<1$, quindi $f(x)<1$;
- per $0<x\leq 1$ è $\sin x<x$, quindi $f(x)<1$.

  Per verificare la relazione $\sin x<x$, consideriamo la funzione $y=x-\sin x$. Risulta $y'=1-\cos x\geq 0$ per $0<x\leq 1$, quindi la funzione è crescente con $y(0)=0-\sin 0=0$, quindi $x-\sin x>0$ per $0<x\leq 1$;

- poiché $f(x)$ è pari, risulta $f(x) < 1$ anche per $-1 \leq x < 0$.

In conclusione, $f(x) < 1$ per $x \neq 0$ e $x = 0$, in cui la funzione vale 1, è un punto di massimo assoluto.

2. La funzione si può scrivere nella forma $f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sin x$ quando $x \neq 0$. Il termine $\sin x$ oscilla fra -1 e $+1$, quindi il grafico di $f(x)$ è compreso fra i grafici di $y = \frac{1}{x}$ e di $y = -\frac{1}{x}$.

In particolare il grafico di $f(x)$ tocca il grafico di:

- $y = \frac{1}{x}$ quando $\sin x = 1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$;
- $y = -\frac{1}{x}$ quando $\sin x = -1 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Mostriamo che in questi infiniti punti i grafici risultano tangenti, verificando che in tali punti le corrispondenti funzioni hanno la stessa derivata.

Nei punti del tipo $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ è:

$$f'(\alpha) = \frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot 0 - 1}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha^2};$$

$$y = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad y'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2};$$

quindi le derivate assumono lo stesso valore.

Analogamente, nei punti del tipo $\beta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ è:

$$f'(\beta) = \frac{\beta \cos \beta - \sin \beta}{\beta^2} = \frac{\beta \cdot 0 - (-1)}{\beta^2} = +\frac{1}{\beta^2};$$

$$y = -\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad y' = +\frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad y'(\beta) = +\frac{1}{\beta^2};$$

quindi le derivate assumono lo stesso valore.

Il grafico di $f(x)$ risulta pertanto tangente ai grafici di $y = \frac{1}{x}$ e di $y = -\frac{1}{x}$ nei punti in cui li tocca. Poiché in tali punti la derivata prima è $f'(\alpha) \neq 0$ o $f'(\beta) \neq 0$, *non* si tratta di punti di massimo o minimo relativo.

Tracciamo i grafici approssimativi di $f(x)$ e $y = \pm\frac{1}{x}$, osservando, oltre a quanto detto finora, che $f(x)$ si annulla in tutti i punti del tipo $x = k\pi$, con k intero non nullo.

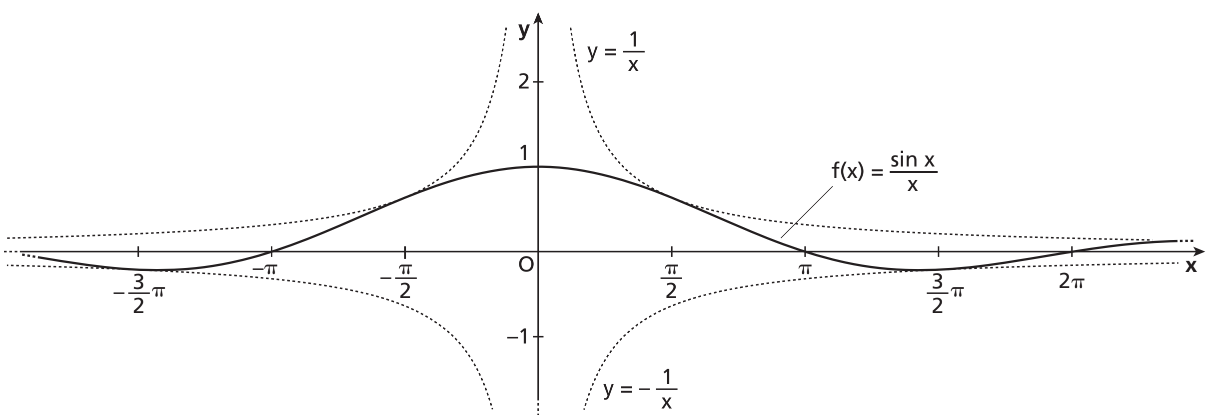
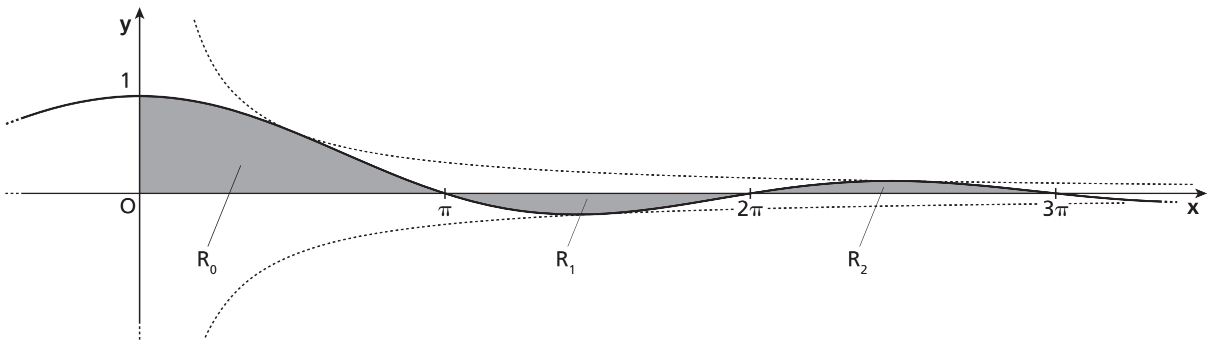


Figura 4

3. Rappresentiamo in figura le regioni R_0, R_1, R_2,



■ **Figura 5**

Calcoliamo i volumi dei solidi di rotazione mediante il metodo dei gusci cilindrici.

In generale, il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y del trapezoide delimitato dal grafico di una funzione positiva $f(x)$ e dall'asse x nell'intervallo $[a; b]$, con $a \geq 0$, è dato da:

$$V = 2\pi \int_a^b x\, f(x) dx.$$

Nel nostro caso troviamo:

$$V_0 = 2\pi \int_0^{\pi} x \frac{\sin x}{x} dx = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2\pi [-\cos x]_0^{\pi} = 2\pi(1+1) = 4\pi;$$

$$V_n = \left| 2\pi \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| 2\pi \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin x\, dx \right| = \left| 2\pi[-\cos x]_{n\pi}^{(n+1)\pi} \right| =$$

$$\left| 2\pi[-\cos(n+1)\pi + \cos n\pi] \right|,$$

dove abbiamo considerato il valore assoluto per avere il volume sempre positivo, anche quando $f(x)$ è negativa.

Valutiamo la quantità dentro alla parentesi quadra:

- se n è pari, $\cos(n+1)\pi = -1$ e $\cos n\pi = 1$, quindi $-\cos(n+1)\pi + \cos n\pi = -(-1) + 1 = 2$;
- se n è dispari, $\cos(n+1)\pi = 1$ e $\cos n\pi = -1$, quindi $-\cos(n+1)\pi + \cos n\pi = -1 + (-1) = -2$.

In entrambi i casi troviamo:

$$V_n = \left| 2\pi[-\cos(n+1)\pi + \cos n\pi] \right| = 2\pi \cdot 2 = 4\pi,$$

quindi $V_0 = V_n = 4\pi$ per ogni n naturale.

4. Il valore assunto dalla funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, al variare di $x \geq 0$, rappresenta l'area sottesa al grafico di $f(x)$ nell'intervallo $[0; x]$.

Osserviamo che:

- $F(0) = 0$;

  $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$, quindi $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale destro per $F(x)$;
- $f(x)$ è positiva o nulla in $[0; \pi]$, quindi $F(x)$ è crescente in $[0; \pi]$ e $F(\pi)$ rappresenta l'area sottesa a $f(x)$ in $[0; \pi]$;

- $f(x)$ è negativa o nulla in $[\pi; 2\pi]$, quindi $F(x)$ è decrescente in $[\pi; 2\pi]$ e $F(2\pi)$ rappresenta l'area sottesa a $f(x)$ in $[0; 2\pi]$, ovvero rappresenta l'area della regione R_0 meno quella della regione R_1.

Ragionando in modo simile, deduciamo che $F(x)$, per $x \geq 0$ e quindi al variare di n naturale:

- è crescente negli intervalli del tipo $[2n\pi; (2n+1)\pi]$;
- è decrescente negli intervalli del tipo $[(2n+1)\pi; (2n+2)\pi]$;
- ammette punti di massimo relativo in $x = (2n+1)\pi$;
- ammette punti di minimo relativo in $x = (2n+2)\pi$;
- poiché le aree delle regioni R_0, R_1, …, R_n, … sono sempre minori, anche le oscillazioni di $F(x)$ sono sempre minori.

Poiché $f(x)$ è pari, $F(x)$ è dispari quindi $\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\frac{\pi}{2}$ e $x = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale sinistro.

Possiamo disegnare il grafico qualitativo di $F(x)$, tenuto conto di queste osservazioni.

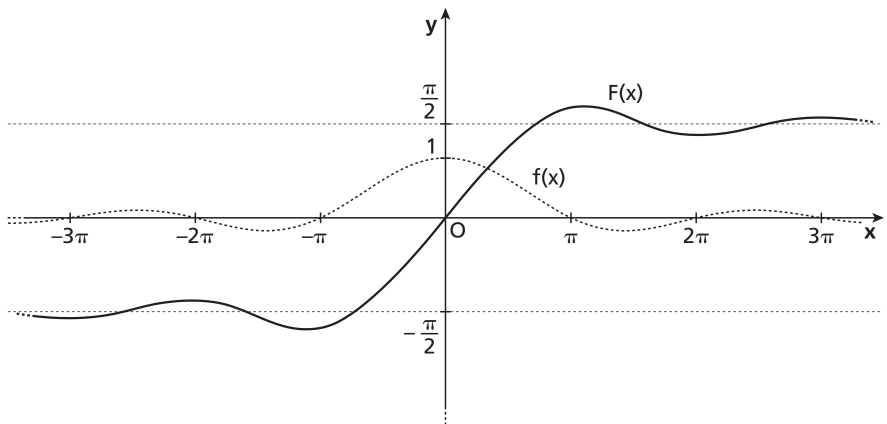


Figura 6