Liceo scientifico e opzione scienze applicate

PROBLEMA 1

Le centraline di controllo del Po a Pontelagoscuro (FE) registrano il valore della portata dell'acqua, ovvero il volume d'acqua che attraversa una sezione trasversale del fiume nell'unità di tempo. Come responsabile della sicurezza della navigazione fluviale in quel tratto del Po, devi valutare quando consentire la navigazione stessa, in considerazione delle condizioni atmosferiche e del livello dell'acqua.

Nel corso dell'anno le portate medie del Po (a Pontelagoscuro) sono di circa 34 milioni di m^3 al giorno in regime di magra, 130 milioni di m^3 al giorno in regime normale con un'oscillazione del 10% e 840 milioni di m^3 al giorno in regime di piena (fonte *deltadelpo.net*).

Durante un periodo di alcuni giorni di piogge intense, dalle rilevazioni registrate risulta che:

- nei primi due giorni dall'inizio delle misurazioni il valore della portata dell'acqua si è alzato dal valore di regime normale di 130 milioni di m^3 al giorno fino al valore massimo di 950 milioni di m^3 al giorno;
- nei giorni successivi la portata si è ridotta, tornando verso il valore di regime normale, inizialmente più velocemente e poi più lentamente.

1. Indicando con t il tempo, misurato in giorni, fissa un adeguato sistema di riferimento cartesiano in cui rappresentare il grafico dell'andamento della portata. Verifica se una delle seguenti funzioni può essere usata come modello per descrivere tale andamento, tenendo conto dei valori rilevati e del punto di massimo, giustificando con opportune argomentazioni sia la scelta che l'esclusione.

$$f(t) = a \cdot \cos(b \cdot t) + c,$$

$$g(t) = a \cdot e^{-\frac{t^2}{b}} + c,$$

$$h(t) = a \cdot t \cdot e^{1-b \cdot t} + c,$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}.$$

2. Individuata la funzione, determina i parametri in modo che siano verificate le condizioni sopra descritte per la portata e tracciane il grafico.

3. Studia la variazione della portata nel tempo e valuta dopo quanti giorni tale variazione raggiunge il suo minimo. Inoltre, dovendo prevedere quando autorizzare la ripresa della navigazione in condizioni di sicurezza, valuta, analiticamente o per via grafica, dopo quanti giorni la portata rientra nel limite di oscillazione del valore di regime normale.

4. Nel tempo trascorso tra l'inizio del fenomeno e il rientro nei limiti normali, qual è il volume di acqua che ha superato il valore di regime normale?

PROBLEMA 1

1. La funzione che descrive la portata del Po:

- deve essere crescente in [0; 2], perché nei primi due giorni la portata aumenta da 130 milioni di metri cubi al giorno (= 130 Mm^3/giorno) a 950 Mm^3/giorno, quindi la derivata prima deve essere positiva in [0; 2];
- poi deve decrescere, prima più velocemente e dopo più lentamente, riportandosi al valore normale di 130 Mm^3/giorno, quindi la derivata prima dopo il giorno $t = 2$ deve essere negativa assumendo inizialmente valori minori e poi valori maggiori (ma sempre negativi).

Esaminiamo quale delle 3 funzioni date può soddisfare queste condizioni.

- Caso $f(t) = a\cos(bt) + c$.
  La funzione è periodica, quindi non può descrivere il fenomeno considerato.
  Infatti, se i parametri sono tali per cui la funzione passa dal valore iniziale 130 al valore massimo 950 in 2 giorni, allora al quarto giorno (cioè dopo altri 2 giorni) il valore ridiscende a 130 per poi tornare a salire subito dopo, mentre la portata del fiume si deve stabilizzare a circa 130.
- Caso $g(t) = a \cdot e^{-\frac{t^2}{b}} + c$.
  Fissati i parametri, l'esponente $-\dfrac{t^2}{b}$ ha segno costante e quindi la funzione $g(t)$ sarebbe o sempre crescente o sempre decrescente.
  Anche questa funzione non può rappresentare il fenomeno.
- Caso $h(t) = a \cdot t \cdot e^{1-bt} + c$.
  Per esclusione, questa è la funzione che descrive il fenomeno.
  Per sicurezza, esaminiamo comunque il suo comportamento.
  All'istante iniziale la funzione assume valore $h(0) = c$.
  Se ***b* è positivo**, l'esponente $(1 - bt)$ tende a 0 al crescere di t e questo comporta che al trascorrere dei giorni il valore della funzione si riporta al valore iniziale; infatti:

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = \lim_{t\to+\infty} (a \cdot t \cdot e^{1-bt} + c) = c,$$

in quanto nella forma indeterminata $t \cdot e^{1-bt}$ prevale l'infinitesimo dato dall'esponenziale.
La derivata prima

$$h'(t) = a \cdot e^{1-bt} + a \cdot t \cdot e^{1-bt} \cdot (-b) = a \cdot e^{1-bt}(1 - bt)$$

si annulla in $t = \dfrac{1}{b}$, e assume segni opposti in $\left[0; \dfrac{1}{b}\right[$ e $\left]\dfrac{1}{b}; +\infty\right[$.

Se scegliamo allora anche ***a* positivo**, il segno di $a(1 - bt)$ è positivo prima di $t = \dfrac{1}{b}$ e negativo dopo; si realizza così la condizione di crescenza e decrescenza della funzione portata.

2. Determiniamo numericamente i parametri a, b, c della funzione $h(t)$.
Il parametro c è la portata iniziale, poiché $h(0) = c$, quindi $c = 130$.
$c = 130$ è anche il valore di regime per $t \to \infty$, quindi $h(t) = 130$ è asintoto orizzontale.
Il valore massimo si registra al secondo giorno; poiché avevamo dedotto nel punto precedente che il massimo di $h(t)$ si ha per $t = \dfrac{1}{b}$, otteniamo:

$$\frac{1}{b} = 2 \;\rightarrow\; b = \frac{1}{2}.$$

Imponiamo infine che il massimo valore assunto dalla funzione sia 950:

$$h(2) = 950 \ \rightarrow \ a \cdot 2 \cdot e^{1-\frac{1}{2}2} + 130 = 950 \ \rightarrow \ 2a = 950 - 130 \ \rightarrow \ a = 410.$$

La funzione che descrive la portata dell'acqua del Po a Pontelagoscuro è dunque:

$$h(t) = 410 \cdot t \cdot e^{1-\frac{1}{2}t} + 130 \text{ con } t \geq 0 \text{ in giorni e } h(t) \text{ in Mm}^3.$$

La derivata prima è:

$$h'(t) = 410 \cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\left(1 - \frac{1}{2}t\right);$$

$h'(t)$ si annulla in $t = 2$, è positiva per $0 \leq t < 2$ ed è negativa per $t > 2$. Quindi la funzione $h(t)$ è crescente per $0 \leq t < 2$, decrescente per $t > 2$ e $t = 2$ è punto di massimo relativo e assoluto.
Per disegnare il grafico di $h(t)$, non rimane che calcolare il punto di flesso.

$$h''(t) = 410 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-\frac{1}{2}t}\left(1 - \frac{1}{2}t\right) + 410 \cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{1}{2}\right) = -205 \cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\left(1 - \frac{1}{2}t + 1\right) =$$

$$-205 \cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\left(2 - \frac{1}{2}t\right).$$

La derivata seconda è negativa, e la funzione $h(t)$ volge la concavità verso il basso, per:

$$2 - \frac{1}{2}t > 0 \ \rightarrow \ t < 4;$$

mentre per $t > 4$ la concavità è rivolta verso l'alto.
Il punto di flesso di ascissa $t = 4$ ha ordinata:

$$h(4) = 410 \cdot 4 \cdot e^{1-\frac{1}{2}4} + 130 \simeq 733.$$

Possiamo disegnare il grafico di $h(t)$.

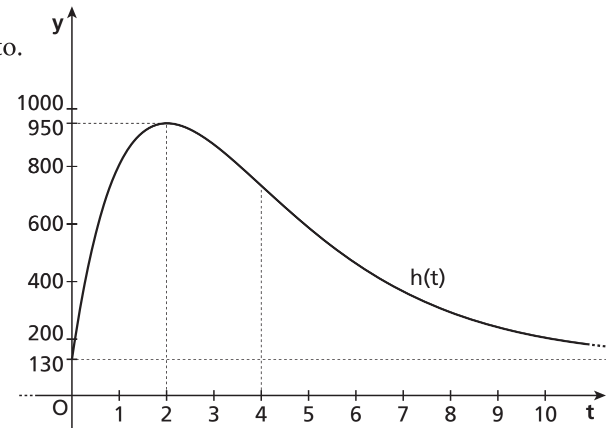

Figura 2

3. La «variazione della portata nel tempo» è rappresentata dalla derivata prima di $h(t)$.

$$h'(t) = 410 \cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\left(1 - \frac{1}{2}t\right).$$

Sulla base di quanto detto nei punti precedenti, possiamo compilare il seguente schema.

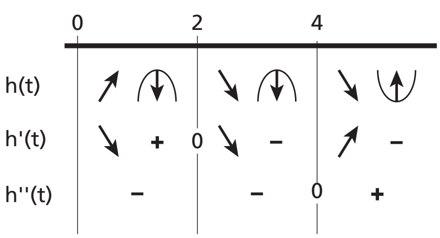

Figura 3

Dunque la funzione $h'(t)$:

- è positiva e decrescente in $[0; 2[$;
- si annulla in $t = 2$;
- è negativa e decrescente in $]2; 4[$;
- è negativa e crescente in $]4; +\infty[$, quindi deve ammettere asintoto orizzontale; infatti:

$$\lim_{t \to +\infty} h'(t) = \lim_{t \to +\infty}\left[410 \cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\left(1 - \frac{1}{2}t\right)\right] = 0,$$

l'asintoto orizzontale è l'asse x;

- ha un minimo relativo e assoluto in $t = 4$, con $h'(4) = 410 \cdot e^{1-\frac{1}{2}4}\left(1 - \frac{1}{2} \cdot 4\right) = -410 \cdot e^{-1} = -151$; la variazione della portata raggiunge quindi il suo minimo al quarto giorno di osservazione;
- interseca l'asse y alla quota $h'(0) = 410 \cdot e \simeq 1115$.

Per stabilire il punto di flesso di $h'(t)$, calcoliamo la sua derivata seconda, ovvero $h'''(t)$:

$$h'''(t) = \mathrm{D}\left[-205 \cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\left(2 - \frac{1}{2}t\right)\right] = -205 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-\frac{1}{2}t}\left(2 - \frac{1}{2}t\right) - 205 \cdot e^{1-\frac{1}{2}t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$\frac{205}{2}e^{1-\frac{1}{2}t}\left(2 - \frac{1}{2}t + 1\right) = \frac{205}{2}e^{1-\frac{1}{2}t}\left(3 - \frac{1}{2}t\right).$$

$h'''(t)$ si annulla e cambia di segno in corrispondenza di $t = 6$. La funzione $h'(t)$ ha un punto di flesso in $t = 6$, volge la concavità verso l'alto in $[0; 6[$ e verso il basso in $]6; +\infty[$.
Tracciamo il grafico di $h'(t)$.

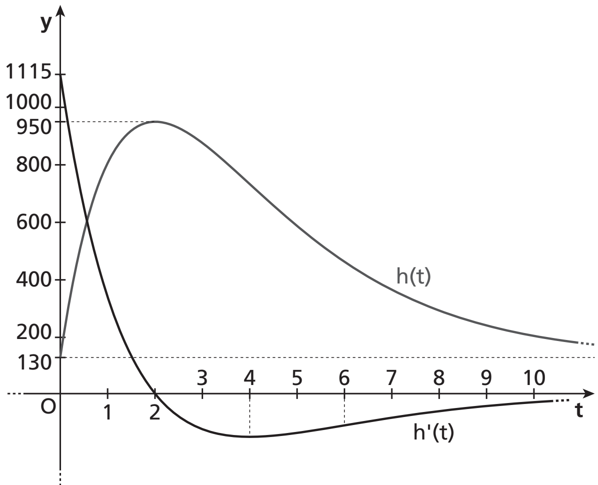

Figura 4

La portata dell'acqua in regime normale oscilla fra 117 e 143 Mm^3/giorno ($\pm 10\%$ dalla media normale di 130 Mm^3/giorno).
Perché sia autorizzata la ripresa della navigazione, deve essere:

$$h(t) < 143.$$

Dal grafico di $h(t)$ deduciamo che i valori della funzione si abbassano sotto la soglia 143 verosimilmente dopo il decimo giorno. Calcoliamo:

$$h(11) = 410 \cdot 11 \cdot e^{1-\frac{1}{2}11} + 130 \simeq 180;$$

$$h(12) = 410 \cdot 12 \cdot e^{1-\frac{1}{2}12} + 130 \simeq 163;$$

$$h(13) = 410 \cdot 13 \cdot e^{1-\frac{1}{2}13} + 130 \simeq 152;$$

$$h(14) = 410 \cdot 14 \cdot e^{1-\frac{1}{2}14} + 130 \simeq 144;$$

$$h(15) = 410 \cdot 15 \cdot e^{1-\frac{1}{2}15} + 130 \simeq 139.$$

Quindi il fiume può essere riaperto alla navigazione dal 15° giorno.

4. Il volume d'acqua che ha superato nei primi 15 giorni il valore di regime normale (130 milioni di metri cubi al giorno), senza tenere conto dei limiti di oscillazione, è dato dall'integrale:

$$V=\int_0^{15}[h(t)-130]dt=\int_0^{15}410\cdot t\cdot e^{1-\frac{1}{2}t}\,dt.$$

Risolviamo per parti l'integrale indefinito:

$$\int t\cdot e^{1-\frac{1}{2}t}dt=-2\int t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-\frac{1}{2}t}dt=-2\left[te^{1-\frac{1}{2}t}-\int e^{1-\frac{1}{2}t}dt\right]=-2\left[te^{1-\frac{1}{2}t}+2\int\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-\frac{1}{2}t}dt\right]=$$

$$-2\left(te^{1-\frac{1}{2}t}+2e^{1-\frac{1}{2}t}\right)=-2e^{1-\frac{1}{2}t}(t+2).$$

Proseguiamo con il calcolo del volume:

$$V=410\int_0^{15}t\cdot e^{1-\frac{1}{2}t}dt=410\left[-2e^{1-\frac{1}{2}t}(t+2)\right]_0^{15}=-820\left\{\left[e^{1-\frac{1}{2}15}(15+2)\right]-\left[e^{1-\frac{1}{2}0}(0+2)\right]\right\}=$$

$$-820(17e^{-6,5}-2e)\simeq 4437\ \mathrm{Mm}^3.$$

Quindi, nei 15 giorni considerati, attraverso le centraline di controllo sono passati circa 4437 milioni di metri cubi d'acqua in più rispetto al volume d'acqua che si avrebbe avuto in regime normale.
Se consideriamo anche le oscillazioni del 10% del regime normale, e quindi consideriamo 143 come valore di regime normale, dobbiamo sottrarre $13\cdot 15$ a 4437. In tal caso, nei 15 giorni considerati, sono passati 4242 milioni di metri cubi d'acqua in più rispetto al regime normale.