Scuole italiane all'estero • Americhe

PROBLEMA 2

Sia Γ il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + k \cdot e^{-x}} \qquad k \in \mathbb{R}, k > 0$$

definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

1. Relativamente al grafico Γ, mostra come variano le coordinate del suo punto di flesso P in funzione del parametro k e verifica che in tale punto la pendenza del grafico è indipendente da k.

2. Dopo aver verificato che la funzione $p(x) = \log(1 + k \cdot e^{-x}) + x$ è una primitiva di f, determina l'area della regione piana compresa tra Γ, l'asse y, l'asse x e la retta di equazione $x = \log(\alpha)$. Che valore deve assumere α perché tale area sia uguale a 1?

3. Dimostra che

$$g(x) = \log\left(\frac{kx}{1 - x}\right),$$

è la funzione inversa di f e tracciane il grafico. Prova inoltre che la suddetta funzione g è crescente in tutto il suo dominio e che il grafico della funzione h, definita come

$$h(x) = f(x) + g(x),$$

interseca l'asse x in un unico punto.

4. Considerata, per $x \in \mathbb{R}$, la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$

determina le equazioni dei suoi asintoti e traccia il grafico di $F(x)$.

PROBLEMA 2

1. Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+ke^{-x}} = (1+ke^{-x})^{-1}$, con $k \in \mathbb{R}^+$.

La funzione è definita e derivabile in $\mathbb{R}$; per determinare i punti di flesso, calcoliamo la derivata seconda:

$$f'(x) = -1 \cdot (1+ke^{-x})^{-2} \cdot (-ke^{-x}) = ke^{-x}(1+ke^{-x})^{-2};$$

$$f''(x) = -ke^{-x}(1+ke^{-x})^{-2} + ke^{-x} \cdot (-2)(1+ke^{-x})^{-3} \cdot (-ke^{-x}) =$$

$$-ke^{-x}(1+ke^{-x})^{-2} + 2k^2e^{-2x}(1+ke^{-x})^{-3} = ke^{-2x}(1+ke^{-x})^{-3}[-e^x(1+ke^{-x})+2k] =$$

$$ke^{-2x}(1+ke^{-x})^{-3}[-e^x - k + 2k] = ke^{-2x}(1+ke^{-x})^{-3}(k-e^x).$$

Gli zeri e il segno di $f''(x)$ sono individuati dall'ultimo fattore:

$$f''(x) \geq 0 \quad \rightarrow \quad k - e^x \geq 0 \quad \rightarrow \quad e^x \leq k \quad \rightarrow \quad x \leq \ln k.$$

La funzione $f(x)$ volge quindi la concavità verso l'alto per $x < \ln k$, verso il basso per $x > \ln k$ e in $x = \ln k$ presenta un flesso.

L'ordinata del flesso è:

$$f(\ln k) = \frac{1}{1+ke^{-\ln k}} = \frac{1}{1+k\cdot\frac{1}{k}} = \frac{1}{2},$$

quindi il punto di flesso ha coordinate $P\left(\ln k; \frac{1}{2}\right)$.

La retta tangente a Γ in P ha coefficiente angolare pari a:

$$f'(\ln k) = ke^{-\ln k}(1+ke^{-\ln k})^{-2} = k\cdot\frac{1}{k}\left(1+k\cdot\frac{1}{k}\right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

La pendenza della retta tangente nel punto di flesso vale sempre $\frac{1}{4}$, quindi è indipendente dal valore di k.

2. Osserviamo che la funzione "log" usata nel testo del problema indica la funzione logaritmo naturale (in base e). Verifichiamo dunque che $p(x) = \ln(1+ke^{-x}) + x$ è una primitiva di $f(x)$, cioè proviamo che $p'(x) = f(x)$:

$$p'(x) = \frac{1}{1+ke^{-x}} \cdot (-ke^{-x}) + 1 = \frac{-ke^{-x}+1+ke^{-x}}{1+ke^{-x}} = \frac{1}{1+ke^{-x}} = f(x).$$

Tracciamo il grafico approssimativo di $f(x)$, in modo da rappresentare la regione indicata dal problema. Oltre a quanto già dedotto su $f(x)$, osserviamo che:

- la funzione è positiva su $\mathbb{R}$;
- la derivata prima è sempre positiva, quindi $f(x)$ è crescente in $\mathbb{R}$;
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, quindi la funzione ha l'asse x come asintoto orizzontale sinistro;

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, quindi la funzione ha la retta $y = 1$, come asintoto orizzontale destro.

Possiamo tracciare il grafico Γ della funzione. A titolo di esempio, disegniamo il grafico nel caso $k = 1$.

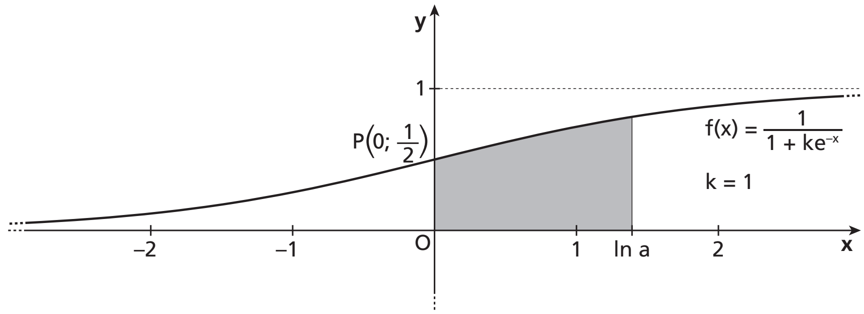

Figura 8

Se $\ln \alpha > 0$, cioè $\alpha > 1$, la retta $x = \ln \alpha$ e la regione R di cui dobbiamo calcolare l'area si trovano a destra dell'asse delle ordinate (come esemplificato in figura).
Se $\ln \alpha < 0$, cioè $0 < \alpha < 1$, la retta $x = \ln \alpha$ e la regione R si trovano a sinistra dell'asse delle ordinate.
Se $\ln \alpha = 0$, cioè $\alpha = 1$, la retta $x = \ln \alpha$ si trova sull'asse delle ordinate e l'area della regione è nulla.
Calcoliamo l'area A della regione nei primi due casi.

Se $\ln a > 1$:

$$A = \int_0^{\ln a} f(x)dx = [p(x)]_0^{\ln \alpha} = [\ln(1 + ke^{-\ln \alpha}) + \ln \alpha] - [\ln(1 + ke^{-0}) + 0] =$$

$$\ln\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right) + \ln \alpha - \ln(1 + k) = \ln\left(\frac{\alpha + k}{\alpha}\right) + \ln \alpha - \ln(1 + k) = \ln\left(\frac{\frac{\alpha + k}{\alpha} \cdot \alpha}{1 + k}\right) = \ln\left(\frac{\alpha + k}{1 + k}\right).$$

Se $0 < \alpha < 1$:

$$A = \int_{\ln \alpha}^{0} f(x)dx = -\int_0^{\ln \alpha} f(x)dx = -\ln\left(\frac{\alpha + k}{1 + k}\right).$$

Determiniamo α in modo che l'area della regione sia 1.

Se $\alpha > 1$:

$$\ln\left(\frac{\alpha + k}{1 + k}\right) = 1 \quad \to \quad \frac{\alpha + k}{1 + k} = e \quad \to \quad \alpha = e(1 + k) - k.$$

Osserviamo che:

$$e(1 + k) - k = e + k(e - 1) > 1,$$

quindi la soluzione $\alpha = e(1 + k) - k$ è accettabile, per ogni $k > 0$:

Se $0 < \alpha < 1$:

$$-\ln\left(\frac{\alpha + k}{1 + k}\right) = 1 \quad \to \quad \frac{\alpha + k}{1 + k} = \frac{1}{e} \quad \to \quad \alpha = \frac{1 + k}{e} - k.$$

Imponiamo che il valore trovato sia compreso fra 0 e 1:

$$\frac{1 + k}{e} - k > 0 \quad \to \quad 1 + k - ek > 0 \quad \to \quad k(e - 1) < 1 \quad \to \quad k < \frac{1}{e - 1};$$

$$\frac{1+k}{e} - k < 1 \quad \rightarrow \quad 1+k-ek < e \quad \rightarrow \quad k(e-1) > 1-e \quad \rightarrow \quad \forall k > 0.$$

Quindi la soluzione $\alpha = \dfrac{1+k}{e} - k$ è accettabile solo per $0 < k < \dfrac{1}{e-1}$, con $\alpha = \dfrac{1}{e-1} \simeq 0{,}582$.

3. Abbiamo già dimostrato che $f(x)$ è crescente, quindi è invertibile. Mostriamo ora che la funzione

$$g(x) = \ln\left(\frac{kx}{1-x}\right)$$

è l'inversa di $f(x)$ facendo vedere che entrambe le composizioni di funzioni $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ corrispondono alla funzione identità:

$$f(g(x)) = f\left(\ln\left(\frac{kx}{1-x}\right)\right) = \frac{1}{1+ke^{-\ln\frac{kx}{1-x}}} = \frac{1}{1+k \cdot \dfrac{1-x}{kx}} = \frac{1}{1+\dfrac{1-x}{x}} = \frac{x}{x+1-x} = x,$$

uguaglianza valida nel dominio $0 < x < 1$ di $g(x)$;

$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{1+ke^{-x}}\right) = \ln\frac{k\dfrac{1}{1+ke^{-x}}}{1-\dfrac{1}{1+ke^{-x}}} = \ln\left(\frac{k}{1+ke^{-x}} \cdot \frac{1+ke^{-x}}{1+ke^{-x}-1}\right) = \ln\frac{1}{e^{-x}} = \ln e^{x} = x.$$

Il grafico di $g(x)$ può essere allora ottenuto da quello di $f(x)$ tramite simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ del primo e terzo quadrante.

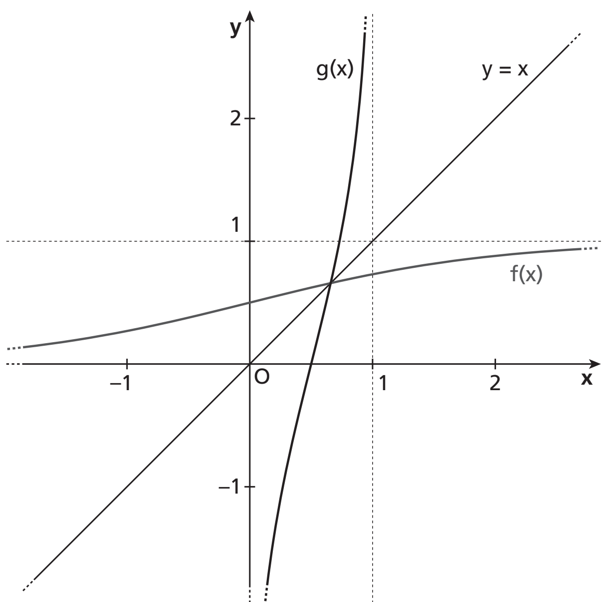

Figura 9

La funzione $g(x)$ è definita e continua in $0 < x < 1$, è sempre crescente (perché è crescente $f(x)$ e per la simmetria) e ha gli asintoti verticali $x = 0$ e $x = 1$; risulta dunque suriettiva.
La funzione $h(x) = f(x) + g(x)$ ha lo stesso dominio $0 < x < 1$ di $g(x)$, è continua in $0 < x < 1$ ed è strettamente crescente, poiché è somma di due funzioni continue e strettamente crescenti.
Inoltre, essendo $f(x)$ limitata in $]0;1[$, risulta:

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} [f(x) + g(x)] = -\infty; \qquad \lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

Possiamo concludere che la funzione $h(x)$ è continua, strettamente crescente e suriettiva, quindi il suo grafico interseca una e una sola volta l'asse delle ascisse.

4. Ricordiamo che la funzione $p(x)$ è una primitiva di $f(x)$, quindi:

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=[p(t)]_0^x=[\ln(1+ke^{-x})+x]-[\ln(1+ke^{-0})+0]=\ln(1+ke^{-x})+x-\ln(1+k).$$

La funzione integrale è definita e continua su $\mathbb{R}$, quindi non presenta asintoti verticali.
Studiamo l'esistenza dell'asintoto destro.
Dal limite:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+ke^{-x})+x-\ln(1+k)]=0+\infty-\ln(1+k)=+\infty,$$

deduciamo che potrebbe esistere l'asintoto obliquo. Calcoliamo:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(1+ke^{-x})}{x}+\frac{x}{x}-\frac{\ln(1+k)}{x}\right]=0+1-0=1;$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}[F(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+ke^{-x})+x-\ln(1+k)-x]=0-\ln(1+k)=-\ln(1+k).$$

I due limiti sono finiti, quindi $F(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione $y=x-\ln(1+k)$ per $x\to+\infty$.
Studiamo l'esistenza dell'asintoto sinistro.
Il limite:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=\lim_{x\to-\infty}[\ln(1+ke^{-x})+x-\ln(1+k)]$$

si presenta nella forma $+\infty-\infty-\ln(1+k)$.
Risolviamo la forma indeterminata costituita dai primi due termini:

$$\lim_{x\to-\infty}[\ln(1+ke^{-x})+x]=\lim_{x\to-\infty}[\ln(1+ke^{-x})+\ln e^x]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\ln[e^x(1+ke^{-x})]=\lim_{x\to-\infty}\ln(e^x+k)=\ln k,$$

quindi:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=\ln k-\ln(1+k)=\ln\frac{k}{1+k}$$

e la funzione $F(x)$ presenta l'asintoto orizzontale di equazione $y=\ln\frac{k}{1+k}$ per $x\to-\infty$.
Per tracciare il grafico di $F(x)$ consideriamo che:

- $F(x)$ è definita e continua in $\mathbb{R}$;
- $F(x)$ è sempre crescente, poiché $F'(x)=f(x)$ è positiva su tutto $\mathbb{R}$;
- $F(0)=0$ e, poiché è crescente, risulta $F(x)<0$ per $x<0$ e $F(x)>0$ per $x>0$;
- $F(x)$ volge sempre la concavità verso l'alto, poiché $F''(x)=f'(x)$ è positiva su tutto $\mathbb{R}$;
- $F(x)$ ha due asintoti di equazione $y=\ln\frac{k}{1+k}$ e $y=x-\ln(1+k)$.

Con queste informazioni, tracciamo il grafico plausibile di $F(x)$.

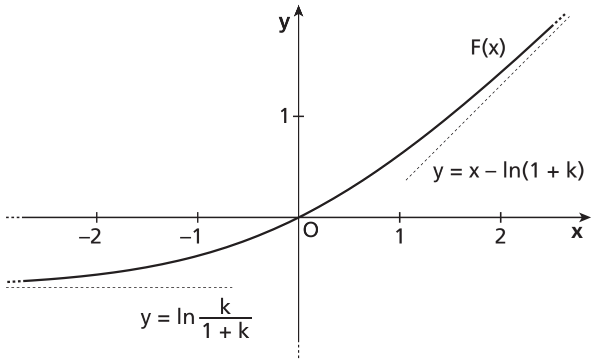

Figura 10