Liceo scientifico e opzione scienze applicate

PROBLEMA 2

Le funzioni g_1, g_2, g_3, g_4 sono definite nel modo seguente:

$$g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$g_2(x) = |x| - 1,$$

$$g_3(x) = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

$$g_4(x) = \ln(|x|).$$

1. Verifica che nei punti $x = 1$ e $x = -1$ le funzioni g_1, g_2, g_3, g_4 condividono le stesse rette tangenti.

2. Dopo aver tracciato i grafici delle funzioni g_1, g_2, g_3, g_4, deduci quelli delle funzioni:

$$f_1(x) = \begin{cases} \ln(|x|), & \text{se } |x| \geq 1 \\ -g_1(x), & \text{se } |x| < 1 \end{cases},$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \ln(|x|), & \text{se } |x| \geq 1 \\ -g_2(x), & \text{se } |x| < 1 \end{cases},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \ln(|x|), & \text{se } |x| \geq 1 \\ -g_3(x), & \text{se } |x| < 1 \end{cases},$$

classifica gli eventuali punti di non derivabilità di f_1, f_2, f_3 e posto

$$I_1 = \int_{-e}^{e} f_1(x)dx,$$

$$I_2 = \int_{-e}^{e} f_2(x)dx,$$

$$I_3 = \int_{-e}^{e} f_3(x)dx,$$

verifica le disuguaglianze:

$$I_1 < I_3 < I_2.$$

3. Posto

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ g_1(x), & \text{se } 0 < x < 1, \\ \ln(|x|), & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

dimostra che la funzione:

$$H(x) = \int_0^x h(t)dt$$

ammette uno zero nell'intervallo $[\sqrt{e}; e]$.

4. Calcola il volume del solido ottenuto facendo ruotare di $\frac{\pi}{3}$ radianti intorno all'asse x la regione di piano delimitata dalle rette di equazioni $x = -1$, $x = +1$ e dai grafici di g_2 e g_1.

PROBLEMA 2

1. Le quattro funzioni:

$$g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$g_2(x) = |x| - 1,$$

$$g_3(x) = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

$$g_4(x) = \ln|x|,$$

sono tutte definite su $\mathbb{R}$ e quindi sono definite in un intorno di $x = 1$ e di $x = -1$.
Calcoliamo le derivate prime delle funzioni:

$$g_1'(x) = x,$$

$$g_2'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases},$$

$$g_3'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

$$g_4(x) = \frac{1}{x}.$$

I grafici delle quattro funzioni presentano la stessa retta tangente in $x = 1$, poiché in tale punto le funzioni assumono lo stesso valore e le rette tangenti hanno lo stesso coefficiente angolare:

$$g_1(1) = g_2(1) = g_3(1) = g_4(1) = 0;$$

$$g_1'(1) = g_2'(1) = g_3'(1) = g_4'(1) = 1.$$

L'equazione della retta tangente comune nel punto $x = 1$ è:

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \rightarrow y = x - 1.$$

Analogamente, coincidono le rette tangenti ai grafici delle quattro funzioni nel punto $x = -1$:

$$g_1(-1) = g_2(-1) = g_3(-1) = g_4(-1) = 0;$$

$$g_1'(-1) = g_2'(-1) = g_3'(-1) = g_4'(-1) = -1.$$

L'equazione della retta tangente comune nel punto $x = -1$ è:

$$y - 0 = (-1) \cdot (x + 1) \rightarrow y = -x - 1.$$

2. Osserviamo che le funzioni $g_i(x)$ sono tutte pari, quindi i loro grafici sono simmetrici rispetto all'asse delle ordinate.

Per disegnare i grafici delle funzioni, osserviamo quanto segue:

- $g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ è una parabola con la concavità verso l'alto e di vertice $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$;

- $g_2(x) = |x| - 1$ è ottenuta applicando alla funzione valore assoluto elementare $y = |x|$ una traslazione verso il basso di 1;
- $g_3(x) = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ è ottenuta applicando alla funzione elementare $y = \cos x$ una contrazione orizzontale di fattore $\frac{\pi}{2}$ e una contrazione verticale di fattore $-\frac{2}{\pi}$, ha periodo $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$;
- $g_4(x) = \ln|x|$ è ottenuta per simmetria rispetto all'asse delle ordinate della funzione elementare $y = \ln x$.

Disegniamo i quattro grafici.

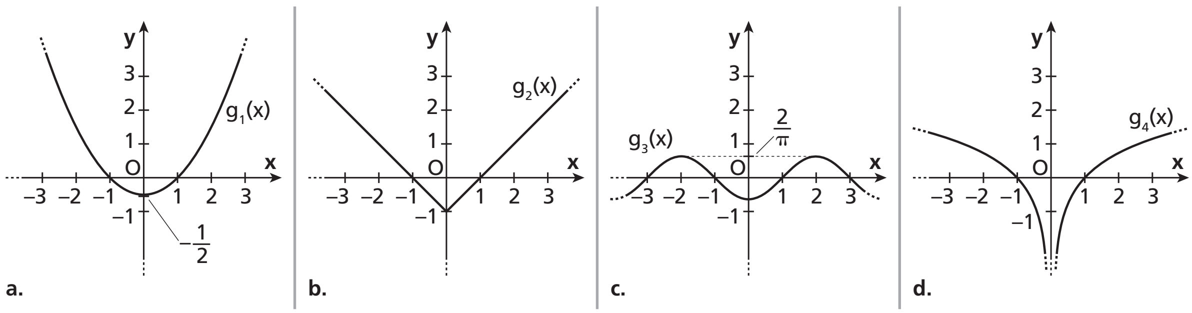

Figura 4

Le tre funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ sono definite a tratti; in particolare i loro grafici corrispondono a quelli di $g_4(x)$ per $x \leq -1 \vee x \geq 1$ e, rispettivamente, a quelli di $-g_1(x)$, $-g_2(x)$, $-g_3(x)$ per $-1 < x < 1$.

Analiticamente abbiamo:

$$f_1(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases},$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ 1 - |x| & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Disegniamo i tre grafici.

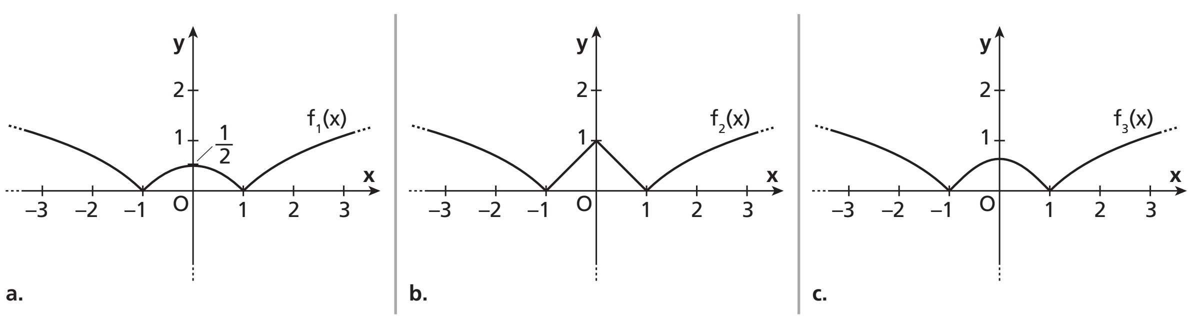

Figura 5

Per tutte e tre le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ i punti $x = 1$ e $x = -1$ sono punti angolosi. Infatti, per quanto ricavato in precedenza, in tali punti le rette tangenti da sinistra e da destra hanno coefficiente angolare rispettivamente -1 e $+1$.

Per $x \neq \pm 1$, le tre funzioni $f_1(x)$ e $f_3(x)$ sono continue e derivabili mentre la funzione $f_2(x)$ ha un altro punto angoloso in $x = 0$ poiché $\lim_{x \to 0^-} f_2'(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^+} f_2'(x) = -1$.

Verifichiamo se è soddisfatta la catena di disuguaglianze $I_1 < I_3 < I_2$. Osserviamo innanzi tutto che le funzioni $f_i(x)$ sono sempre non negative, coincidono per valori esterni all'intervallo $[-1; 1]$ e sono simmetriche rispetto all'asse y; chiedersi se è vera la catena $I_1 < I_3 < I_2$ equivale quindi a chiedersi se è vera la catena di disuguaglianze:

$$\int_0^1 f_1(x)dx < \int_0^1 f_3(x)dx < \int_0^1 f_2(x)dx.$$

Calcoliamo:

$$\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \simeq 0,33;$$

$$\int_0^1 f_2(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

$$\int_0^1 f_3(x)dx = \int_0^1 \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{4}{\pi^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\pi^2} \simeq 0,41.$$

È quindi verificato che $I_1 < I_3 < I_2$

3. Consideriamo:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \ln x & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

e la funzione integrale:

$$H(x) = \int_0^x h(t)dt.$$

La funzione $h(x)$ è continua in $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ e presenta in $x = 0$ una discontinuità a salto, quindi $H(x)$ è continua in $\mathbb{R}$. Otteniamo infatti:

- per $x \le 0$:

$$H(x) = -\int_x^0 0\,dt = 0;$$

- per $0 < x \le 1$:

$$H(x) = \int_0^x h(t)dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)dt = \left[\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t\right]_0^x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x,$$

  e in particolare $H(1) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$;

- per $x > 1$:

$$H(x) = \int_0^x h(t)dt = \int_0^1 h(t)dt + \int_1^x h(t)dt = -\frac{1}{3} + \int_1^x \ln t\,dt =$$

$$-\frac{1}{3} + [t\ln t - t]_1^x = -\frac{1}{3} + x\ln x - x + 1.$$

La funzione $H(x)$ è dunque continua in $[\sqrt{e}; e]$ con:

$$H(\sqrt{e}) = -\frac{1}{3} + \sqrt{e}\ln\sqrt{e} - \sqrt{e} + 1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{e} \simeq -0,16 \rightarrow H(\sqrt{e}) < 0;$$

$$H(e) = -\frac{1}{3} + e\ln e - e + 1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \rightarrow H(e) > 0.$$

Per il teorema di esistenza degli zeri, $H(x)$ ammette almeno uno zero in $]\sqrt{e}\,; e[$.

d. Evidenziamo in grigio, nella figura, la regione delimitata dalle rette di equazione $x = -1$, $x = 1$ e dai grafici di $g_1(x)$ e $g_2(x)$.

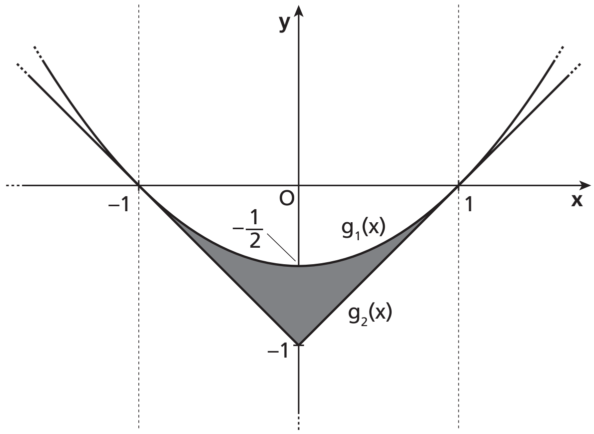

Figura 6

In generale, il volume del solido generato dalla rotazione completa (cioè di 2π radianti) attorno all'asse x di una regione sottesa al grafico di $f(x)$ in un intervallo $[a; b]$ è dato dall'integrale $V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$.

Poiché la rotazione è di $\frac{\pi}{3}$ radianti, il volume $V_{\frac{\pi}{3}}$ si ottiene dalla proporzione $V_{\frac{\pi}{3}} : V = \frac{\pi}{3} : 2\pi$.

Quindi $V_{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} V = \frac{1}{6} V = \frac{\pi}{6}\int_a^b [f(x)]^2\,dx$.

Nel caso in esame, dobbiamo considerare il solido che si ottiene ruotando di $\frac{\pi}{3}$ radianti la funzione $g_2(x)$ svuotato del solido che si ottiene ruotando di $\frac{\pi}{3}$ radianti la funzione $g_1(x)$.

Tenendo infine conto della simmetria rispetto all'asse y, otteniamo per il volume:

$$V_{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6}\int_{-1}^{1}[g_2^2(x) - g_1^2(x)]dx = 2\cdot\frac{\pi}{6}\int_0^1\left[(x-1)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)^2\right]dx =$$

$$\frac{\pi}{3}\int_0^1\left(x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)dx =$$

$$\frac{\pi}{3}\int_0^1\left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{4}\right)dx =$$

$$\frac{\pi}{3}\left[-\frac{1}{20}x^5 + \frac{3}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{4}x\right]_0^1 =$$

$$\frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{20} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{\pi}{15}.$$