Liceo scientifico e opzione scienze applicate

PROBLEMA 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si puo fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico. È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.
In figura è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano Oxy: il quadrato di lato $DE = 2$ (in opportune unità di misura) e di centro C rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta il profilo della pedana.

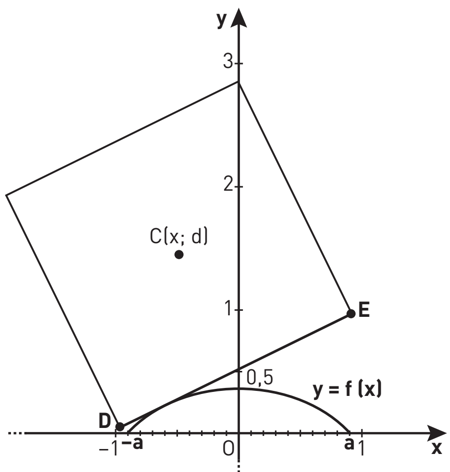

Figura 1

1. Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in figura 1, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \; x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per $x \in [-a; a]$; determina inoltre il valore degli estremi a e $-a$ dell'intervallo.

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione $f(x)$ relativo all'intervallo $[-a; a]$, come mostrato in figura.

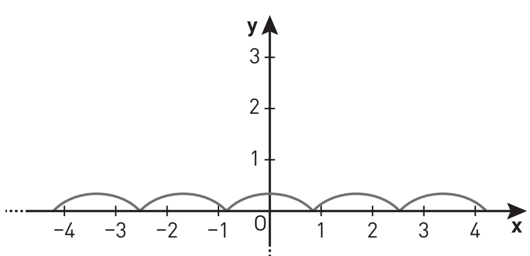

Figura 2

2. Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:
   - a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;
   - la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una «gobba», cioè dell'arco di curva di equazione

$$y = f(x) \text{ per } x \in [-a; a].$$

   Stabilisci se tali condizioni sono verificate[1].

3. Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli *ACL* e *ALM* in figura, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell'ordinata *d* del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.

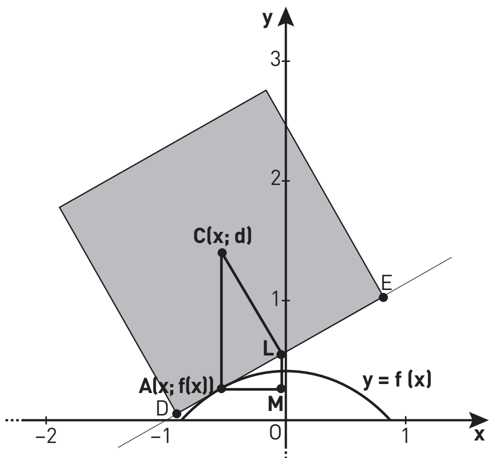

Figura 3

Anche il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{per } x \in \left[-\frac{\ln(3)}{2}; \frac{\ln(3)}{2}\right]$$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4. Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

---

1. In generale, la lunghezza dell'arco di curva avente equazione $y = \varphi(x)$ compreso tra le ascisse x_1 e x_2 è data da $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx$.

PROBLEMA 1

1. Studiamo la funzione $f(x)$ per verificare che il suo grafico sia compatibile con il profilo della pedana.
Dominio della funzione. $x \in \mathbb{R}$
Eventuali simmetrie della funzione.

$$f(-x) = \sqrt{2} - \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \sqrt{2} - \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = f(x)$$

La funzione è pari.

Intersezione con l'asse y.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{2} - \dfrac{e^0 + e^{-0}}{2} = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Osserviamo che $\sqrt{2} - 1 \simeq 0{,}414 < 0{,}5$; nel grafico vediamo che effettivamente l'intersezione della curva con l'asse y ha ordinata minore di 0,5.

Intersezioni con l'asse x.

$$y = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \;\rightarrow\; e^x + \frac{1}{e^x} = 2\sqrt{2} \;\rightarrow$$

$$\frac{e^{2x} + 1}{e^x} = \frac{2\sqrt{2}\, e^x}{e^x} \xrightarrow{e^x > 0} e^{2x} - 2\sqrt{2}\, e^x + 1 = 0$$

Poniamo $z = e^x$.

$$z^2 - 2\sqrt{2}\, z + 1 = 0 \;\rightarrow\; z = \sqrt{2} \pm 1.$$

Osserviamo che i due valori ottenuti sono positivi, quindi otteniamo due soluzioni distinte per x.

$$e^x = \sqrt{2} \pm 1 \;\rightarrow\; x = \ln(\sqrt{2} + 1) \vee x = \ln(\sqrt{2} - 1).$$

Per la simmetria della funzione, i due valori ottenuti sono opposti, con $\ln(\sqrt{2} \pm 1) \simeq \pm 0{,}88$.

Concludiamo che $a = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

Segno della funzione.

$$y > 0 \;\rightarrow\; \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \;\rightarrow\; e^x + \frac{1}{e^x} < 2\sqrt{2} \;\rightarrow$$

$$\frac{e^{2x} + 1}{e^x} < \frac{2\sqrt{2}\, e^x}{e^x} \xrightarrow{e^x > 0} e^{2x} - 2\sqrt{2}\, e^x + 1 < 0$$

Poniamo $z = e^x$ e ricordiamo che $\ln(x)$ è una funzione monotona crescente.

$$z^2 - 2\sqrt{2}\, z + 1 < 0 \;\rightarrow\; \sqrt{2} - 1 < z < \sqrt{2} + 1 \;\rightarrow\; \ln(\sqrt{2} - 1) < x < \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Quindi $f(x)$ è positiva nell'intervallo $]-a; a[$, in accordo al grafico assegnato.

Studio della derivata prima.

$$f'(x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2}$$

$$f'(x) > 0 \ \to \ e^{-x} - e^{x} > 0 \ \to \ e^{x} < \frac{1}{e^{x}} \xrightarrow{e^{x} > 0} e^{2x} < 1 \ \to \ 2x < \ln 1 \ \to \ x < 0$$

La funzione è quindi crescente per $x < 0$, decrescente per $x > 0$. Per $x = 0$ la funzione ha un massimo assoluto.

Studio della derivata seconda.

$$f''(x) = -\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \ \to \ f''(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

La funzione non ha flessi e volge la concavità verso il basso.
Possiamo concludere che il grafico della funzione assegnata è compatibile con il profilo della pedana.

2. Chiamiamo $\overline{f}(x)$ la funzione ottenuta affiancando le copie del grafico di $f(x)$. $\overline{f}(x)$ è una funzione continua, periodica di periodo $2a$. Calcoliamo la derivata sinistra e la derivata destra nel punto di non derivabilità $x = a = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

$$\overline{f}'_{-}(a) = f'(a) = \frac{e^{-a} - e^{a}}{2} = \frac{1 - e^{2a}}{2e^{a}} = \frac{1 - e^{2\ln(\sqrt{2}+1)}}{2e^{\ln(\sqrt{2}+1)}} =$$

$$\frac{1 - (\sqrt{2} + 1)^2}{2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{1 - 2 - 1 - 2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{-2(\sqrt{2} + 1)}{2(\sqrt{2} + 1)} = -1$$

Per la periodicità di $\overline{f}(x)$ e per la simmetria di $f'(x)$ (che è una funzione dispari), otteniamo:

$$\overline{f}'_{+}(a) = f'(-a) = -f'(a) = 1.$$

Nel punto $x = a$ la tangente sinistra e la tangente destra del grafico hanno coefficienti angolari rispettivamente -1 e 1; il prodotto di tali coefficienti angolari è -1, quindi le rette sono perpendicolari. Per la periodicità la stessa proprietà vale in tutti i punti di non derivabilità.

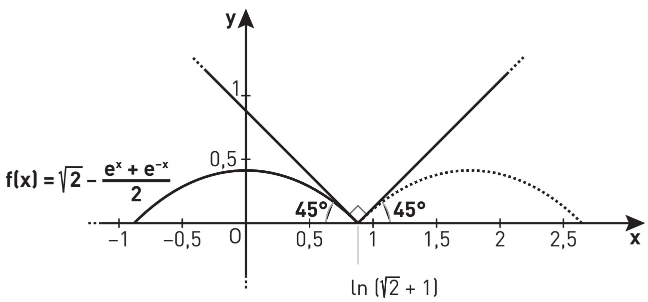

Figura 5

Per determinare la lunghezza dell'arco descritto da $f(x)$ in $[-a; a]$ calcoliamo l'integrale

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Poiché $f'(x)$ è dispari, la funzione integranda è pari, quindi:

$$L = 2\int_{0}^{a} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = 2\int_{0}^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-x} - e^{x}}{2}\right)^2}\, dx =$$

$$2\int_{0}^{a} \sqrt{\frac{4 + e^{-2x} + e^{2x} - 2}{4}}\, dx = \int_{0}^{a} \sqrt{2 + e^{-2x} + e^{2x}}\, dx.$$

Osserviamo che l'espressione all'interno della radice quadrata è uguale a $(e^x + e^{-x})^2$, quindi:

$$L = \int_0^a \sqrt{(e^x + e^{-x})^2}\, dx = \int (e^x + e^{-x}) dx = [e^x - e^{-x}]_0^a =$$

$$e^a - e^{-a} = e^{\ln(\sqrt{2}+1)} - e^{-\ln(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2 + 1 + 2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = 2$$

L'arco è quindi lungo come il lato del quadrato.

In alternativa l'integrale $\int_0^a \sqrt{2 + e^{-2x} + e^{2x}}\, dx$ si poteva risolvere per sostituzione, ponendo $e^x = t$.
Dal cambio di variabile segue:

$$x = \ln t \;\rightarrow\; dx = \frac{1}{t} dt;$$

$$x = 0 \;\rightarrow\; t = 1;$$

$$x = a \;\rightarrow\; t = e^a.$$

L'integrale diventa:

$$L = \int_1^{e^a} \sqrt{2 + \frac{1}{t^2} + t^2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^{e^a} \sqrt{\frac{2t^2 + 1 + t^4}{t^2}} \cdot \frac{1}{t} dt =$$

$$\int_1^{e^a} \sqrt{\left(\frac{t^2+1}{t}\right)^2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^{e^a} \frac{t^2+1}{t^2} dt = \int_1^{e^a} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = [t - t^{-1}]_1^{e^a} =$$

$$e^a - e^{-a} = e^{\ln(\sqrt{2}+1)} - e^{-\ln(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}+1} =$$

$$\frac{2 + 1 + 2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = 2.$$

Come ulteriore possibilità, potevamo risolvere l'integrale:

$$L = 2\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right)^2}\, dx$$

applicando le formule del seno iperbolico e del coseno iperbolico.
Se ricordiamo infatti che:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$\int \sinh x\, dx = \cosh x + c; \quad \int \cosh x\, dx = \sin hx + c;$$

per l'integrale L ricaviamo:

$$L = 2\int_0^a 1 + \left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right)^2 dx = 2\int_0^a \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = 2\int_0^a \sqrt{1 + (\cosh^2 x - 1)}\, dx =$$

$$2\int_0^a \sqrt{\cosh^2 x}\, dx = 2\int_0^a \cosh x\, dx = 2[\sinh x]_0^a = 2\left(\frac{e^a - e^{-a}}{2} - \frac{e^0 - e^{-0}}{2}\right) = e^a - e^{-a},$$

da cui si ottiene il risultato precedente.

3. Il punto L è la proiezione del centro C del quadrato sul lato DE, quindi il triangolo ACL è rettangolo in L. Il punto M ha la stessa ascissa di L e la stessa ordinata di A, quindi il triangolo ALM è rettangolo in M. Le rette AC e LM sono parallele perché entrambe parallele all'asse y, quindi formano con la trasversale DE angoli alterni interni congruenti: $A\widehat{L}M \cong L\widehat{A}C$. I triangoli ACL e ALM hanno dunque tutti gli angoli congruenti e quindi sono simili.

Per il significato geometrico della derivata prima:

$$\frac{\overline{LM}}{\overline{AM}} = f'(x).$$

Per la similitudine fra i triangoli abbiamo:

$$\frac{\overline{LM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{LC}},$$

dove $\overline{LC} = 1$ poiché corrisponde a metà del lato del quadrato. Combinando le due uguaglianze otteniamo

$$f'(x) = \frac{\overline{AL}}{\overline{LC}} \;\rightarrow\; f'(x) = \overline{AL}.$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo ACL:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{LC}^2 + \overline{AL}^2} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-x} - e^{x}}{2}\right)} =$$

$$\sqrt{\frac{4 + e^{-2x} + e^{2x} - 2}{4}} = \sqrt{\frac{2 + e^{-2x} + e^{2x}}{4}} = \sqrt{\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}.$$

Pertanto:

$$d = f(x) + \overline{AC} = \sqrt{2} - \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} + \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \sqrt{2}.$$

d. Per evitare ambiguità, chiamiamo $g(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$. Osserviamo che il grafico di $g(x)$ si ottiene da quello di $f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ tramite una traslazione verso il basso lungo l'asse y, in quanto $\frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{2}$.

Determiniamo l'angolo α formato dalla tangente a $g(x)$ nel punto $x = -\frac{\ln 3}{2}$ con l'asse x, calcolando la derivata prima di $g(x)$ in tale punto.

$$g'(x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} \;\rightarrow\; g'\left(-\frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{e^{\frac{\ln 3}{2}} - e^{-\frac{\ln 3}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3 - 1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\rightarrow$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\rightarrow\; \alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$$

L'angolo interno β del poligono regolare cercato è quindi:

$$\beta = 180° - 2\alpha = 120°.$$

Il poligono regolare che ha angoli interni di 120° è l'esagono regolare.

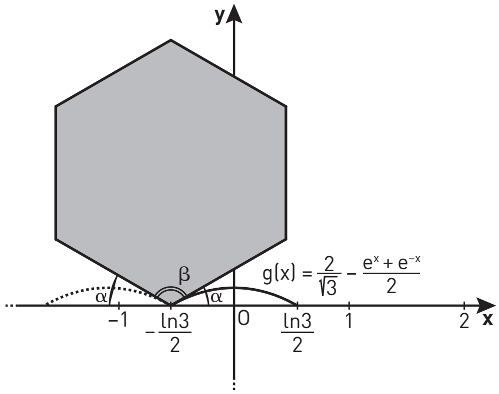

Figura 6

Infine, per calcolare la lunghezza l del lato dell'esagono regolare, imponiamo che tale lunghezza sia uguale a quella della «gobba» individuata da $g(x)$ nell'intervallo $\left[-\frac{\ln 3}{2}; \frac{\ln 3}{2}\right]$.

Poiché $g'(x) = f'(x)$, i calcoli sono simili a quelli svolti nel punto **2.** nel caso del quadrato, cambiando solo gli estremi di integrazione:

$$l = \int_0^{\frac{\ln 3}{2}} 1 + [g'(x)]^2 dx = \ldots = [e^x - e^{-x}]_0^{\frac{\ln 3}{2}} = e^{\frac{\ln 3}{2}} - e^{-\frac{\ln 3}{2}} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 1,15.$$